Løsningsforslag ekstraoppgaver 6

8.1. Husk at en funksjon er injektiv dersom $x \neq y$ gir $f(x) \neq f(y)$, men her ser vi at $f(3) = 9 = f(-3)$, eller generelt at $f(z) = z^2 = f(-z)$ for alle $z \in \mathbb{C}$, som betyr at f ikke er injektiv. Vi ser også at f er på formen z^n for et heltall n, og vi vet fra tidligere at alle funksjoner $z^n = w$, for komplekse tall z og w og heltall n, ifølge algebraens fundamentalteorme har en løsning. Dette betyr at for en gitt w så kan vi finne en z slik at $f(z) = w$. Dette betyr at f er surjektiv. Til slutt observerer vi at f ikke er bijektiv fordi f ikke er injektiv, da en funksjon må være både injektiv og surjektiv for å være bijektiv.

8.2. Vi kaller $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en lineærtransformasjon dersom $T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$ for alle skalarer $a, b \in \mathbb{R}$ og alle vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Vi sjekker om dette stemmer i hvert av punktene under. I de tilfellene hvor T ikke er en lineærtransformasjon så er det godt nok å gi et moteksempel hvor $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \neq T(\mathbf{x})+T(\mathbf{y})$ eller $T(a\mathbf{x}) \neq aT(\mathbf{x})$, enten generelt eller for noen utvalgte skalerer a og vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.

a) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \tan(x) \\ e^y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tan(z) \\ e^w \end{bmatrix} \\ &\neq \begin{bmatrix} \tan(z+w) \\ e^{z+w} \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

b) Dette er en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} aT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) &= a(2x+y) + b(2z+w) \\ &= 2(ax) + (ay) + 2(bz) + (bw) \\ &= T\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Dermed går vi videre. Standardmatrisen A til lineærtranformasjonen T er

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e_1}) & T(\mathbf{e_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

For å finne kjernen til T så løser vi ligningssystemet $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, som gir oss at $2x + y = 0$, som igjen betyr at $2x = -y$. Det følger at

$$\ker T = \left\{ \begin{bmatrix} -a \\ 2a \end{bmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\},$$

og dermed også at T ikke er injektiv.
Vi ser at bildet til T er et underrom av $\mathbb{R}$. Men spenner det ut hele $\mathbb{R}$? Vi lar a være et vilkårlig element fra $\mathbb{R}$, og sjekker om vi kan finne en vektor $\mathbf{v}$ slik at $T(\mathbf{v}) = a$. Det kan vi, ved å for eksempel sette $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$. Det følger at $\operatorname{im} T = \mathbb{R}$, og dermed også at T er surjektiv.

c) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \text{ og at } T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 3,$$

som gir at

$$2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \neq 3 = T\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

d) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} 2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= 2(1^2 + 0^2) \\ &= 2 \\ &\neq 2^2 + 0^2 \\ &= T\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

e) Dette er en lineærtranformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} aT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &+ bT\left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right) \\ &= a\begin{bmatrix} x - 5y + 4z \\ y - 6z \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} u - 5v + 4w \\ v - 6w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax - 5ay + 4az \\ ay - 6az \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bu - 5bv + 4bw \\ bv - 6bw \end{bmatrix} \\ &= T\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Dermed går vi videre. Standardmatrisen A til lineærtranformasjonen T er

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e_1}) & T(\mathbf{e_2}) & T(\mathbf{e_3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

For å finne kjernen til T så løser vi lingingssystemet $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vi ser at vi får en fri variabel, og at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 26 & 6 & 1 \end{bmatrix}^T$ er en løsning. Det følger at $\ker T = \operatorname{Sp}\{\begin{bmatrix} 26 & 6 & 1 \end{bmatrix}^T\}$, og dermed også at T ikke er injektiv.
Bildet til T er rommet utspent av kolonnene til A. Opplagt er dette hele $\mathbb{R}^2$. Vi gir tre bevis: Ved å regne ut at determinanten til $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ er ulik 0 ser vi at de to første kolonnene til A allerede spenner ut $\mathbb{R}^2$.

Alternativt kan vi bruke at vi vet at nullrommet til A har dimensjon 1, sammen med teorem 7.27 til å regne ut at kolonnerommet har dimensjon $3-1=2$. Det eneste underrommet av $\mathbb{R}^2$ som har dimensjon 2 er $\mathbb{R}^2$ selv. En siste fremgangsmåte er å la $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$ være et vilkårlig element fra $\mathbb{R}^2$, og sjekke om vi kan finne en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ i $\mathbb{R}^3$ slik at $T(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$. Det kan vi, ved å for eksempel sette $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a+5b & b & 0 \end{bmatrix}^T$. Hvert av disse tre argumentene beviser at T er surjektiv.

f) Dette er en lineærtranformasjon. Sjekk at beregningene stemmer. Standardmatrisen A til lineærtranformasjonen T er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kjernen til T er $\ker T = \mathrm{Sp}\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\}$. T er dermed ikke injektiv. Fra teorem 7.27 ser vi at bildet til T har dimensjon $4-1=3$. Det er uansett opplagt at T ikke er surjektiv ettersom første element i hver vektor i bildet til T må være 0, så det er uansett opplagt at $\dim \mathrm{im} T \leqslant 3$. Det er også klart at kolonne 1, 2 og 3 er lineært uavhengige, for $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$. Dermed danner kolonne 1, 2 og 3 basis for $\mathrm{im}T$ som kan uttrykkes $\mathrm{im}T = \{[0,a,b,c]^T | a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

8.3. For å sette opp ligningen vi skal løse bruker vi standardmatrisen til T til å uttrykke $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-2y \\ -x+3y \\ 3x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Radreduksjon gir $x=5$ og $y=3$. Løsningen er altså $T(\begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}^T) = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}^T$.

8.4.

La $\mathscr{C}$-koordinatvektorene til basisvektorene i $\mathscr{B}$ være gitt som henholdsvis

$$[\,\mathbf{b}_1\,]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ og } [\,\mathbf{b}_2\,]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Altså må

$$\mathbf{b}_1 = a\mathbf{c}_1 + b\mathbf{c}_2$$

og

$$\mathbf{b}_2 = c\mathbf{c}_1 + d\mathbf{c}_2.$$

Første kolonne i A finner vi ved å regne ut $A\mathbf{e}_1$, og andre kolonne ved å regne ut $A\mathbf{e}_2$. Bruker vi nå at

$$[\,\mathbf{b}_1\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 \text{ og } [\,\mathbf{b}_2\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2$$

får vi

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A[\,\mathbf{b}_1\,]_{\mathscr{B}} = [\,\mathbf{b}_1\,]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

og

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A[\,\mathbf{b}_2\,]_{\mathscr{B}} = [\,\mathbf{b}_2\,]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Da vet vi at

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\,\mathbf{b}_1\,]_{\mathscr{C}} & [\,\mathbf{b}_1\,]_{\mathscr{C}} \end{bmatrix}$$

som vi gjenkjenner fra notatene. For å finne a,b,c og d, løser vi de lineære uttrykkene for $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ vi fikk fra koordinatvektorene:

$$a\mathbf{c}_1 + b\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1$$

og

$$c\mathbf{c}_1 + d\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_2$$

Vi løser disse simultant ved å radredusere den utvidede matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 13/24 & 7/24 \\ 0 & 1 & 7/24 & 13/24 \end{array}\right]$$

Vi leser dermed ut at

$$A = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}.$$

Tilsvarende kan vi finne

$$B = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -13 & 7 \\ 7 & -13 \end{bmatrix}.$$

For å finne A kunne vi også satt opp matriseligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

og multiplisert fra venstre med inversmatrisen

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{1\cdot 1 - 5\cdot 5}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

8.5.

a) Dette er standardbasisen 1, x og x^2.
Forklaring: Vi ønsker å skrive et vilkårlig andregradspolynom på formen $p(x) = p(0)f_1(x) + p'(0)f_2(x) + \frac{p''(0)}{2}f_3(x)$. Dette er akkurat hva $f_1 = 1$, $f_2 = x$ og $f_3 = x^2$ tilfredstiller: Gitt $p(x) = a + bx + cx^2$ ser vi at $p(0) = a$, $p'(0) = b$ og $\frac{p''(0)}{2} = c$ ved regning; dette er akkurat koeffisientene foran 1, x og x^2. Alternativ løsning: For en mer systematisk fremgangsmåte kan du følge metoden som er beskrevet i del **b)**.

b) Vi må finne tre polynom $e_1(x)$, $e_2(x)$ og $e_3(x)$ som utgjør en basis slik at et vilkårlig polynom kan skrives på formen $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$ (da blir koordinatene $\begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$). Dette skjer akkurat dersom $e_1(x)$ tilfredstiller

$$e_1(0) = 1 \quad e_1(1) = 0 \quad e_1(2) = 0,$$

$e_2(x)$ tilfredstiller

$$e_2(0) = 0 \quad e_2(1) = 1 \quad e_2(2) = 0,$$

$e_3(x)$ tilfredstiller

$$e_3(0) = 0 \quad e_3(1) = 0 \quad e_3(2) = 1$$

(sett inn i likningen for $p(x)$ uttrykt ved e_i'ene for å se dette).

e_1: Polynomet kan skrives på formen $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, og vi krever – fra likningene for e_1 – ovenfor at

$$a_0 = 1 \quad a_0 + a_1 + a_2 = 0 \quad a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0.$$

Dette er tre likninger med tre ukjente, og vi bruker radreduksjon for å se at løsningen er $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{3}{2}$ og $a_2 = \frac{1}{2}$. Polynomet er derfor $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. Alternativ løsning: $e_1(1) = 0$ og $e_1(2) = 0$ betyr at $(x-1)$ og $(x-2)$ er faktorer av e_1. Derfor må $e_1(x) = a(x-1)(x-2)$. Kravet $e_1(0) = 1$ gir nå $1 = a \cdot (-1) \cdot (-2)$ slik at $a = \frac{1}{2}$. Derfor er $e_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$. Du kan gange ut for å se at dette er det samme polynomet som vi fant ovenfor.

e_2: Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_2(x) = 2x - x^2$.

e_3: Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$.

Vi har nå tre polynom e_1, e_2 og e_3 som spenner $\mathcal{P}_2$ (det er konstruert slik at alle polynom kan skrives $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$). De er da automatisk lineært uavhengige siden $\dim \mathcal{P}_2 = 3$.

c) Koordinatene til x^2:

$$[x^2]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[x^2]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) Husk at en 3×3-matrise er bestemt av hvordan den endrer standardbasisen i $\mathbb{R}^3$.

T: I koordinatene til standardbasisen for $\mathcal{P}_2$ har vi at $[1]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_1$, $[x]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_2$ og $[x^2]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_3$, hvor $\mathbf{e}_i$ er den i-te standardbasisen for $\mathbb{R}^3$, per definisjon av koordinater til en basis. Fra kommentaren ovenfor må vi ha at $T[1]_{\mathscr{B}} = [1]_{\mathscr{C}}, T[x]_{\mathscr{B}} = [x]_{\mathscr{C}}, T[x^2]_{\mathscr{B}} = [x^2]_{\mathscr{C}}$. Basisen $\mathscr{C}$ er konstruert slik at første koordinat er evaluering i 0, andre koordinat er evaluering i 1 og tredje koordinat er evaluering i 2. Derfor har vi

$$T = \begin{bmatrix} T\mathbf{e}_1 & T\mathbf{e}_2 & T\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

S: Samme fremgang som for T. Husk at $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$, $e_2(x) = 2x - x^2$ og $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. I koordinatene til $\mathscr{B}$ har vi da at $[e_1]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $[e_2]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $[e_3]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Dette gir

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker at matrisen gir riktig endring av koordinater for x^2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at S endrer koordinatene til x^2 som ønsket. Gjør tilsvarende regning for T, eller vis at T og S er inverser ved å multiplisere de sammen og få I_3.

8.6.

a)

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} T_\theta(\mathbf{e}_1) & T_\theta(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

b) Å bruke T_θ to ganger svarer til å rotere med en vinkel θ to ganger: $T_\theta \circ T_\theta = T_{2\theta}$. På matriseform har vi derfor

$$[T_{2\theta}] = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

Vi kan også regne ut dette produktet direkte:

$$[T_\theta]^2 = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Fra element $(1,1)$, eller $(2,2)$, ser vi at $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

8.7. Poenget med denne oppgaven er å se noen større sammenhenger i lineæralgebra. Det er mange måter å vise disse sammenhengene, og det er viktig at implikasjonene går i begge retninger for hvert av punktene.

(I) **a)** $\Leftrightarrow$ **f)**. Per definisjon i kapittel 8 om isomorfier er T en isomorfi hvis og bare hvis det finnes en invers $S\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ slik at $T \circ S = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ og $S \circ T = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$. La B være standardmatrisen til S. Fordi standardmatrisen til $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ er I_n får vi

$$AB = I_n = BA.$$

Det betyr at B må være den inverse matrisen A^{-1} til A.

Og omvendt, dersom A er inverterbar, så definerer A^{-1} en lineærtransformasjon $S\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ som er invers til T.

(II) **a)** $\Leftrightarrow$ **b)**. Dette følger fra teorem 6.12. Se bevis i notatene. Merk at dette beviset kun er gyldig for A en $n \times n$ matrise, og ikke generelt.

(III) **b)** $\Leftrightarrow$ **c)**. Dette følger fra teorem 5.14. Se bevis i notatene.

(IV) **b)** $\Leftrightarrow$ **d)**. Dette følger fra teorem 8.14.2. Bevis: La $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_n}$ være kolonnene i A, og anta at er lineært uavhengige. Se på ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Husk at $A\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{a_1} + \ldots + x_n \cdot \mathbf{a_n}$. Ettersom kolonnone er lineært uavhengige, så impliserer ligningen

$$A\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{a_1} + \ldots + x_n \cdot \mathbf{a_n} = \mathbf{0}$$

at $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Dette betyr at nullrommet til A kun består av nullvektoren. Ettersom A er standardmatrisen til T så er nullrommet til A det samme som kjernen til T. Vi vet så fra teorem 8.9 (se bevis i notatene) at en lineærtransformasjon er injektiv hvis og bare hvis kjernen kun består av nullvektoren. Dermed følger det at T er injektiv hvis og bare hvis kolonnene i A er lineært uavhengige.

(V) **c)** $\Leftrightarrow$ **e)**. Dette er resultatet i teorem 8.14.1. Bevis:

(i) **c)** $\Rightarrow$ **e)**. La $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_n}$ være kolonnene i A, og anta at de spenner ut hele $\mathbb{C}^n$. La så $\mathbf{u}$ være et vilkårlig element i $\mathbb{C}^n$. Fordi kolonnene i A spenner ut hele $\mathbb{C}^n$, så vet vi at ethvert element i $\mathbb{C}^n$ kan skrives som en lineærkombinasjon av kolonnene i A. Da må det eksistere skalarer $c_1, c_2, ..., c_n$ i $\mathbb{C}^n$, hvor ikke alle er lik null, slik at $c_1 \cdot \mathbf{a_1} + c_2 \cdot \mathbf{a_2} + ... + c_n \cdot \mathbf{a_n} = \mathbf{u}$. Det betyr at

$$c_1 \cdot \mathbf{a_1} + \ldots + c_n \cdot \mathbf{a_n} = A\mathbf{c} = \mathbf{u}$$

der vi skriver $\mathbf{c}$ for kolonnevektoren med koordinatene $c_1, \ldots, c_n$. Fordi A er standardmatrisen til T, har vi $A\mathbf{c} = T(\mathbf{c})$. Da har vi vist at T kan nå alle elementer i $\mathbb{C}^n$, og dermed er T surjektiv.

(ii) **c)** $\Leftarrow$ **e)**. La T være surjektiv. Da har vi at T kan nå alle elementer i $\mathbb{C}^n$. Det betyr at hvis $\mathbf{w}$ er en vektor i $\mathbb{C}^n$, så finnes det en vektor $\mathbf{u}$ med $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$. Ettersom A er standardmatrisen til T så betyr dette at $A\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Vi kan skrive dette igjen som

$$A\mathbf{u} = u_1 \cdot \mathbf{a_1} + \ldots + u_n \cdot \mathbf{a_n} = \mathbf{w}$$

der $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_n}$ er kolonnene i A og $u_1, \ldots, u_n$ er koordinatene i $\mathbf{u}$. Dette betyr at kolonnene til A spenner ut hele $\mathbb{C}^n$.

Vi har dermed vist at alle påstandene er ekvivalente. Merk at en lineærtransformasjon $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ er injektiv hvis og bare hvis T er surjektiv ettersom definisjonsområdet og verdiområdet har samme dimensjon. Se figur på neste side for en oversikt over sammenhengene.

8.8.

a) T må være injektiv, og S må være surjektiv. Merk at dette ikke egentlig bruker den lineære strukturen, men er sant for generelle funksjoner: Dersom $f \circ g$ er bijektiv må g være injektiv og f surjektiv.

b) Vi får at $\dim U = \dim W$ siden $U \cong W$, og $\dim V \geq \dim U$ siden T er injektiv (eller $\dim V \geq \dim W$ siden S er surjektiv). Det finnes mange ulike bevis for denne ulikheten. Man kan for eksempel bruke teorem 7.27 på en matrise som representerer T (eller S).

Intuitivt gir det kanskje mening at dersom vi går fra et lite rom til et stort rom, så kan vi ikke treffe alle elementene. I tillegg, dersom vi går fra et stort rom til et lite rom så vil vi nødvendigvis treffe noen elementer flere ganger.

8.9.

a) Dette er ikke en lineærtranformasjon fordi $\sin x + \sin y \neq \sin(x + y)$ og $\cos x + \cos y \neq \cos(x + y)$.

b) Dette er ikke en lineærtranformasjon fordi $e^x + e^y \neq e^{x+y}$.

c)

$$\begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Injektiv, ikke surjektiv.

d) Dette er ikke en lineærtranformasjon fordi $(ax)^2 + (ay)^2 + (az)^2 + (aw)^2 \neq ax^2 + ay^2 + az^2 + aw^2$.

e)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Surjektiv, ikke injektiv.

8.10. Se på hva matrisen gjør med standardbasisen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Dette blir kolonnene i matrisen vi ønsker å finne.

a)

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$[R] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

8.11. For å finne standardmatrisen til $S \circ R$ bruker vi $[S \circ R] = [S][R]$ og får:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Standardmatrisen til $R \circ S$ er:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Lineærtransformasjonen $S \circ R$ speiler planet om linjen $y = -(1+\sqrt{2})x$. Lineærtransformasjonen $R \circ S$ speiler planet om linjen $y = (1 + \sqrt{2})x$. Eventuelt kan vi si at $S \circ R$ gir en rotasjon på $\frac{3}{4}\pi$ etterfulgt av speiling om x-aksen. Motsatt for $R \circ S$.

8.12.

a) For å sjekke om en funksjon $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ er lineær, må vi sjekke to krav: i) $T(p_1(x)+p_2(x)) = T(p_1(x))+T(p_2(x))$ for alle polynom $p_1(x)$ og $p_2(x)$, og ii) $T(c \cdot p(x)) = cT(p(x))$ for alle polynom $p(x)$ og skalarer c. Et polynom er på formen $p(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. Derivasjon av p er $D(p(x)) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$. Du kan eksplisitt sjekke at denne formelen er lineær (tilfredstiller i) og ii)).
G: i)

$$\begin{aligned} G(p_1(x) + p_2(x)) &= x \cdot (p_1(x) + p_2(x)) \\ &= x \cdot p_1(x) + x \cdot p_2(x) \\ &= G(p_1(x)) + G(p_2(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{A er inverterbar}} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{Thm. 6.12}"'] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Def.}"'] & \boxed{\text{Kolonnene i A er lineært uavhengige}} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{Thm. 5.13}"'] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Thm. 8.14.2}"'] & \boxed{\text{Kolonnene i A utspenner $\mathbb{C}^n$}} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Thm. 8.14.1}"'] \\
\boxed{\text{T er en isomorfi}} & \boxed{\text{T er injektiv}} & \boxed{\text{T er surjektiv}}
\end{tikzcd}$$

Figur 0.1: Sammenhengene mellom bevis av påstander i oppgave 8.7.

ii)

$$G(c \cdot p(x)) = x \cdot (c \cdot p(x)) = c \cdot (x \cdot p(x)) = c \cdot G(p(x)).$$

b) Bildet til D er alle polynom som kan skrives som den deriverte til et annet polynom. Gitt et polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ser vi at

$$P(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

er en antiderivert til p; $P' = p$. Men dette betyr jo akkurat at $p = D(P)$. Så bildet til D er $\mathcal{P}$; alle polynom kan skrives som den deriverte av et annet polynom.

Kjernen til D er alle polynom som sendes til null, dvs. alle polynom som har derivert lik null. Dette er de konstante polynomene. Kjernen til D er alle konstante polynom.

Bildet til G er alle polynom $p(x)$ som kan skrives på formen $p(x) = G(q(x))$ for et polynom $q(x)$. Med andre ord $p(x) = xq(x)$. Bildet er derfor alle polynom som har x som en faktor, eller – ekvivalent – minst et nullpunkt i $x = 0$.

Kjernen til G er alle polynom $p(x)$ slik at $G(p(x)) = x \cdot p(x) = 0$. Bare null-polynomet er slik. Kjernen til G består kun av null-polynomet.

c) Husk at en lineærtransformasjon $T : V \to W$ er injektiv hvis og bare hvis kjernen kun består av nullvektoren; surjektiv hvis og bare hvis bildet er W (vi treffer alt).
Fra forrige deloppgave følger det at D er surjektiv, men ikke injektiv; G er injektiv, men ikke surjektiv.

d) Hvis vi bruker produktregelen for derivasjon (matte 1), ser vi at

$$(x \cdot p(x))' = x' \cdot p(x) + x \cdot p'(x) = p(x) + x \cdot p'(x).$$

Dermed får vi:

$$D(G(p(x))) = p(x) + G(D(p(x)))$$

Dette betyr at

$$(D \circ G)(p) - (G \circ D)(p) = p$$

for ethver polynom p, og det vil si at

$$(D \circ G) - (G \circ D) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$$

e) La $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ være polynomene gitt ved:

$$\mathbf{e}_0(x) = 1 \qquad \mathbf{e}_2(x) = x^2$$
$$\mathbf{e}_1(x) = x \qquad \mathbf{e}_3(x) = x^3$$

Da er $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ en basis for $\mathcal{P}_2$, og $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en basis for $\mathcal{P}_3$.

Med hensyn på disse basisene får vi følgende matriser:

$$\text{Matrisen for } D_3\text{: } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrisen for } G_3\text{: } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.13.

a) Derivasjonsreglene fra matte 1:

$$(f+g)' = f' + g',$$

$$(cf)' = cf'.$$

Funksjonen vår er derivasjon; $D(f) = f'$. Likningene fra matte 1 kan omformuleres til

$$D(f+g) = D(f) + D(g),$$

$$D(cf) = cD(f).$$

Dette er definisjonen på at D er lineær.

b) Kjernen til D, $\ker D$, er definert som alle glatte funksjoner f slik at $f' = 0$. Kjernen er, med andre ord, alle løsningene på differensiallikningen $f' = 0$. Dette er de konstante funksjonene $f(x) = c$ hvor c er et reelt tall. Vi kan ta $f = 1$ som en basis for kjernen; en vilkårlig $g(x) = c$ i kjernen er da $g = cf$. Dette betyr at kjernen er endimensjonal, og spesielt er den endeligdimensjonal.

c) Ja. D er surjektiv hvis det for alle glatte funksjoner f, finnes en glatt funksjon F slik at $f = D(F)(= F')$. Husk at fundamentalteoremet i analyse sier at $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (for alle valg av a, vi kan f. eks ta $a = 0$) er en antiderivert til f. Men dette betyr at $f = F' = D(F)$. Er F glatt? $F' = f$, så den er en gang deriverbar, og $F^{(n+1)} = f^{(n)}$ for $n > 1$, så den er glatt fordi f er glatt. Vi har derfor funnet en glatt F som tilfredstiller $D(F) = f$ for en vilkårlig vektor f.

Eksamensoppgaver

Høst 2018: Oppgave 9
Kont 2019: Oppgave 3
Høst 2019: Oppgave 5cd