

Ekstraoppgaver 5

Oppgaver til kapittel 7

1. Svar med begrunnelse på følgende spørsmål:

a) Er mengden

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0, b \geq 0 \right\}$$

et underrom av \mathbb{R}^2 ?

b) Er mengden av alle løsninger (x, y, z) i \mathbb{C}^3 av ligningen

$$x - y + z = 0$$

et underrom av \mathbb{C}^3 ?

c) Er mengden av alle løsninger (x, y, z) i \mathbb{C}^3 av ligningen

$$x - y + z = 1$$

et underrom av \mathbb{C}^3 ?

d) Er mengden

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

et *komplekst* underrom av \mathbb{C}^2 ?

e) Hvis vi oppfatter \mathbb{C}^2 som et reelt vektorrom. Er mengden

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

et *reelt* underrom av \mathbb{C}^2 ?

2. La V være et vektorrom, og la U_1 og U_2 være to underrom av V . Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) Snittet $U_1 \cap U_2$ er et underrom av V .

b) Unionen $U_1 \cup U_2$ er et underrom av V .

3.

a) Finn en basis for vektorrommet $\mathcal{M}_{m \times n}$. Hva er dimensjonen?

b) Se på følgende delmengder av \mathcal{M}_n :

U : alle diagonalmatriser

V : alle inverterbare matriser

W : alle matriser A slik at $A = A^T$

Hvilke av disse mengdene er underrom av \mathcal{M}_n ? (En diagonalmatrise er en matrise der alt utenfor diagonalen er null. Enhetsmatrisen er et eksempel.)

c) For de mengdene i del b) som er underrom, hva er dimensjonen?

4.

a) Forklar hvilke av vektorrommene

\mathcal{P}_n (for forskjellige n)

\mathcal{P}

$\mathcal{C}(\mathbb{R})$

$\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ (for forskjellige n)

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

som er underrom av hverandre.

b) Hvilke av vektorrommene i a) er endeligdimensjonale? Hvilke er uendeligdimensjonale?

5. Vi skriver

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

for mengden av heltall.

a) Hvis vi tenker på elementene i vektorrommet \mathbb{R}^1 som bare tall, kan vi se på \mathbb{Z} som en delmengde av \mathbb{R}^1 . Er \mathbb{Z} et underrom av \mathbb{R}^1 ?

b) Nå prøver vi å gjøre \mathbb{Z} til et vektorrom ved å definere vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon direkte. Definer vektoraddisjon som vanlig addisjon av tall, og definer skalarmultiplikasjon av et reelt tall r og et heltall n ved

$$r * n = \lfloor rn \rfloor,$$

der uttrykket $\lfloor rn \rfloor$ betyr tallet rn rundet ned til et heltall. (Vi bruker symbolet $*$ for skalarmultiplikasjonen her for å ikke blande den sammen med vanlig multiplikasjon av tall.)

Er \mathbb{Z} – med disse operasjonene – et vektorrom?

6. La mengden D være det åpne intervallet mellom $-\pi/2$ og $\pi/2$:

$$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

Se på funksjonene \sin , \cos og \tan som vektorer i $\mathcal{C}(D)$.

a) Er de lineært uavhengige?

b) Kan du få et annet svar ved å isteden se på dem som vektorer i $\mathcal{C}(E)$, der E er en delmengde av D ?

7. La V være et vektorrom. Vis at følgende påstander følger fra vektorromsaksiomene.

a) Hvis $c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, så må vi ha enten $c = 0$ eller $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (eller begge).

b) Hvis $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ for tre vektorer \mathbf{u} , \mathbf{v} og \mathbf{w} i V , så følger det at $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

c) $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ for all skalarer c .

d) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ for alle vektorer \mathbf{v} .

8. Utfordring

Vi har kun definert hva en basis er for endeligdimensjonale vektorrom. For å definere en basis til et uendeligdimensjonalt vektorrom, må vi først forstå hva i) spenne ut og ii) lineær uavhengighet skal bety for uendelige mengder.

Hvis S er en uendelig mengde av vektorer i et vektorrom V , så definerer vi følgende:

i) Vi sier at S *spenner ut* V dersom enhver vektor \mathbf{v} i V kan skrives som en lineærkombinasjon av et endelig antall vektorer i S .

ii) Vi sier at S er *lineært uavhengig* dersom enhver likning

$$x_1 \mathbf{s}_1 + \dots + x_n \mathbf{s}_n = \mathbf{0}$$

(hvor \mathbf{s}_i -ene er vektorer i S) kun har den trivielle løsningen $x_i = 0$ for alle i .

Nå kan vi definere en basis for vilkårlige vektorrom:

En delmengde \mathcal{B} av et vektorrom V er en *basis* for V dersom den spenner ut V og er lineært uavhengig.

(Her definerer vi en basis som en mengde og ikke en liste, siden det blir vanskelig å ha en rekkefølge på basisvektorene når det kan være uendelig mange av dem.)

a) Foreslå en basis for det uendeligdimensjonale vektorrommet \mathcal{P} .

b) Vis at forslaget ditt er en basis.

Eksamensoppgaver

Høst 2017: Oppgave 2

Høst 2018: Oppgave 8

Vår 2019: Oppgave 1

Kont 2019: Oppgave 2ab