Ekstraoppgaver 4

Oppgaver til kapittel 5

1.

a) Sjekk at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

b) Finn en tredje vektor $\mathbf{v}$ som sammen med vektorene i **a)** er lineært uavhengige.

c) Vis at $\mathbf{v}$ og vektorene i **a)** til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$.

2. Finn ut om følgende påstander er sanne eller ikke.

a) Hvis tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært avhengige, så finnes det to tall a og b slik at:

$$\mathbf{u} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}$$

b) Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige, og $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige, så er $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ lineært uavhengige.

3. La A være en $m \times n$-matrise, og la $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Finn ut om følgende påstander er sanne eller ikke (gi et bevis eller et moteksempel).

a) Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige, så er $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_t$ også lineært uavhengige.

b) Hvis $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige, så er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ også lineært uavhengige.

Oppgaver til kapittel 6

1. Regn ut determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

og avgjør – basert på dette – om kolonnene er lineært uavhengige:

2. La $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ være enhetsvektorene i $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En 2×2-matrise A kan beskrives ved hjelp av fire tall α_1, α_2, θ og φ, der:

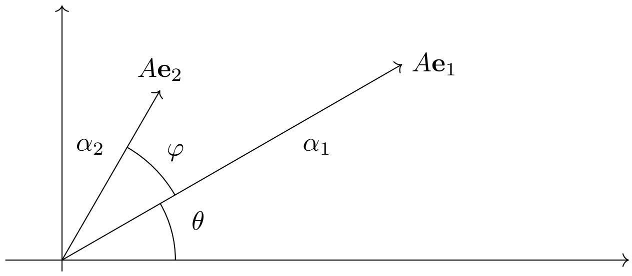
α_1 er lengden av vektoren $A\mathbf{e}_1$

α_2 er lengden av vektoren $A\mathbf{e}_2$

θ er vinkelen (mot klokken) opp til vektoren $A\mathbf{e}_1$

φ er vinkelen (mot klokken) fra $A\mathbf{e}_1$ til $A\mathbf{e}_2$

Disse er illustrert på figuren under.



a) Hvordan kan du, basert på tallene α_1, α_2, θ og φ, se om determinanten til A er positiv, negativ eller 0?

b) Forklar hvordan determinanten til A endrer seg hvis vi endrer én av de fire verdiene α_1, α_2, θ og φ, mens vi lar de tre andre forbli som de er.

c) Finn $\det A$ uttrykt ved α_1, α_2, θ og φ.

3. Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke. Gi et bevis eller moteksempel i hvert tilfelle.

a) La A og B være $n \times n$-matriser. Hvis AB er inverterbar, så er både A og B inverterbare.

b) Anta at A er en inverterbar matrise. Da har vi at

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

4. La A være en $n \times n$-matrise, og la $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Anta at $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, men at $A\mathbf{u} = A\mathbf{v}$. Hva kan du da si om determinanten til A?

Eksamensoppgaver

Høst 2017: Oppgave 2abd
Vår 2018: Oppgave 3a
Høst 2018: Oppgave 2
Vår 2019: Oppgave 3