

Løsningsforslag ekstraoppgaver 3

3.1.

a)

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.2. Her kan vi for eksempel prøve å finne a, b slik at

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dette gir et ligningssystem med totalmatrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Med andre ord kan vi skrive $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ som

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3.3. Her er det mange løsninger og mange måter å gjøre det på. Én løsning er å regne ut kryssproduktet av de to vektorene. En annen er å finne en vektor (x, y, z) slik at det *ikke* finnes a, b slik at

$$a \cdot (1, 5, -3) + b \cdot (4, 18, 4) = (x, y, z).$$

Hvis vi nå lar $x = y = 0$, får vi ligningene

$$\begin{aligned} a + 4b &= 0 \\ 5a + 18b &= 0, \end{aligned}$$

hvor eneste mulighet er at $a = b = 0$. Men vi har også at $-3a + 4b = z$, så hvis $x = y = 0$ må som sagt $a = b = 0$, men da må også $z = 0$. Dermed kan vi velge for eksempel vektoren $(0, 0, 1)$ som løsning på oppgaven.

3.4. Her kan vi for eksempel summere de to vektorene eller skalere en av dem.

3.5. I (a) har vi planet hvor første koordinat er null. Kall det gjerne yz planet. I (b) er alle vektorene lineært avhengige, utspennet er linjen i yz -planet hvor $y = z$. Vektorene i (c) spenner ut hele \mathbb{R}^3 . En måte å se det på er å legge merke til at alle vektorene i standardbasen lar seg uttrykke som lineærkombinasjoner av de tre.

4.1.

a) Gir ikke mening.

b) $\begin{bmatrix} -36 & 7 & 13 \\ -24 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -38 & 3 & 9 \\ 14 & 11 & 5 \\ -16 & -8 & -36 \end{bmatrix}$

d) Gir ikke mening.

e) Gir ikke mening.

f) $\begin{bmatrix} -11 \\ 26 \\ -68 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -290 \\ -192 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

i) 69

4.2. Legger man merke til at en løsning er gitt ved $(-1, 1, 0)$ og at $(1, -2, 1)$ ligger i nullrommet til A kan man hoppe rett til den generelle løsningen:

$$\begin{bmatrix} -1+t \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix}$$

Gausseliminasjon fungerer selvsagt også. Vi setter opp totalmatrisen og radreduserer:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Dermed får vi en fri variabel $z = t$ der $t \in \mathbb{R}$. Andre rad gir $y = 1 - 2t$ og første rad gir $x = -1 + t$.

4.3. $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er den første kolonnen til A , mens $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er summen av kolonnene til A . Vi har altså

$$A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ 5 & y \end{bmatrix}$$

hvor $3 + x = -1$ og $5 + y = 0$.

4.4.

a) Vi setter identitetsmatrisen ved siden, og bruker Gauss-Jordan for å skrive matrisen på redusert trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{-7}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

slik at inversen er

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-7}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

b) Samme fremgangsmåte som i a) gir inversen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.5. Vektoren må være på formen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ hvor a og b er reelle tall. Konstanten c kan være 0 eller 1. For $c = 1$ må $b = 0$ men vi kan velge a fritt. Dette svarer geometrisk til at vektorer som kun har komponent langs y -aksen blir null-vektoren ved multiplikasjon med A . For $c = 0$ må $a = 0$ men vi kan velge b fritt. Dette svarer geometrisk til at vektorer som kun har komponent langs x -aksen ikke påvirkes av multiplikasjon med A .

Hint: Vi ønsker at $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, som gir likningene $a = c \cdot a$ og $0 = b \cdot c$. Det er nå to muligheter: 1) $c = 1$ og $b = 0$, eller 2) $c = 0$ og $a = 0$.

Eksamensoppgaver

Høst 2012: Oppgave 3

Vår 2018: Oppgave 4ab

Høst 2018: Oppgave 5

Vår 2019: Oppgave 6 (første del)