Ekstraoppgaver 1

Oppgaver til kapittel 1

1. Beregn og merk av i det komplekse planet. Husk at det kan være lurt å bruke polar form.

a) $(1+\sqrt{3}i)^7$

b) $(1+i)\cdot(1+\sqrt{3}i)$

c) $(1+i)/(1+\sqrt{3}i)$

d) $(1+2i)\cdot(1-2i)$

e) $(1+2i)/(1-2i)$

2. Løs ligningene

a) $z^2-z+5=0$

b) $z^3=2i$

c) $z^4=2$

d) $z^5=2+2i$

3. La $z=a+bi$. Finn real- og imaginærdelen til

a) z^4

b) $\frac{1}{z}$

c) $\frac{z-1}{z+1}$

d) $\frac{1}{z^2}$

4. La $z=re^{i\theta}$, og gjenta a) og b) i oppgaven over.

5.

a) Finn alle løsninger av ligningen

$$z^3-3z^2+3z-1=0.$$

Skissér løsningene i det komplekse planet.

b) Finn alle løsninger av ligningen

$$z^3-3z^2+3z-2=0$$

ved å bruke svaret du fant i **a)**. Skissér løsningene i det komplekse planet.

6. Vis at dersom koeffisentene a_i i polynomligningen

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0=0$$

er reelle, kommer løsningene i konjugatpar, altså at dersom w er en løsning, er også $\overline{w}$ en løsning.

7. La $n>0$, og la z være en n-terot av et reelt tall. Er $\bar{z}$ også en n-terot av dette tallet?

8. Noen artige polygoner.

a) Finn alle tredjerøttene til 1. Tegn en rett linje fra løsning til løsning, etter økende vinkel. Hva slags geometrisk figur er dette?

b) Repeter del **a)** for alle fjerderøttene til 1.

c) Repeter del **a)** for alle n-terøttene ($n\geq 3$) til 1.

9. La $z\neq 0$ og $w\neq 0$ være komplekse tall. Vis at $zw\neq 0$.

10. La z og w være komplekse tall. Bruk ulikheten

$$-|z|\leq \operatorname{Re} z\leq |z|$$

til å bevise trekantulikheten

$$|z+w|\leq |z|+|w|.$$

11. Skriv om til polar form og regn ut:

a) $(\sqrt{3}+i)\cdot(1-i)$

b) $(\sqrt{3}+i)/(1-i)$

12. La z og w være følgende komplekse tall:

$$z=\frac{3\pi}{4}i \qquad w=-\frac{3\pi}{4}i$$

a) Skriv tallet e^z-e^w på polar form.

b) Skriv tallet e^z/e^w på polar form.

13. Skissér alle z i det komplekse planet som tilfredstiller

a) $\operatorname{Im} z>0$.

b) $z^2=0$.

c) $z\overline{z}=9$.

d) $z^6=-1+i\sqrt{3}$.

e) $z-(\overline{z-2i})=0$.

14. La z og w være komplekse tall. Vis at

a) $\overline{z/w}=\overline{z}/\overline{w}$.

b) $(\overline{z})^n=\overline{z^n}$.

c) $|z+w|^2+|z-w|^2=2|z|^2+2|w|^2$

15.

a) Finn polarkoordinatene til de komplekse tallene z som tilfredsstiller $iz=\overline{z}$

b) Finn alle løsningene til ligningen $z^4=(z-1)^4$

Eksamensoppgaver

Høst 2017: Oppgave 1
Vår 2018: Oppgave 1
Kont 2018: Oppgave 1
Kont 2019: Oppgave 1
Høst 2021: Oppgave 1