

Løsningsforslag ekstraoppgaver 1

1.1.

a) Siden $1 + \sqrt{3}i$ ligger i første kvadrant, kan vi skrive

$$\theta = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

og

$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Vi beregner så

$$(1 + \sqrt{3}i)^7 = 2^7 e^{\frac{7\pi}{3}i} = 128e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

b) Siden $1 + i$ ligger i første kvadrant og danner vinkelen $\pi/4$ med den reelle aksene, kan vi skrive

$$1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Vi beregner

$$(1 + i) \cdot (1 + \sqrt{3}i) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$$

c) Vi beregner

$$(1 + i)/(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{12}i}$$

d) De to neste er grei å ta på kartesisk form:

$$(1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = 1 + 4 = 5$$

(Merk at dette er det samme som $|1 + 2i|^2$.)

e)

$$\frac{1 + 2i}{1 - 2i} = \frac{(1 + 2i)^2}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5}(-3 + 4i)$$

1.2. Husk at det finnes en oppskrift på å finne n -terøttene til w :

1. Skriv w på polar form $w = re^{i(\theta + 2\pi k)}$ (alle heltall k gir samme komplekse tall siden du ender samme sted selv om du går k hele sirkler rundt origo før du stopper).

2. Røttene er

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k)}.$$

3. Det er egentlig bare n ulike komplekse tall her. Vi velger fjerne $k = 0, 1, \dots, n - 1$, fordi det er vanlig (men du kan starte på hvilken som helst k_0 og velge $k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, k_0 + (n - 1)$):

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Avmerking: Husk at polar form $re^{i\theta}$ forstås som det komplekse tallet med lengde r og vinkel θ . Dermed kan tallene i punkt 3. enkelt skisseres i det komplekse planet.

a) Den kjente og kjære abc-formelen gir $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{19}i)$. Disse tallene er på kartesisk form og kan plottes som $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{19}}{2})$ og $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{19}}{2})$ i det komplekse planet.

b) Her er $w = 2i$. Tallet $2i$ ligger på den positive delen av den imaginære aksene. Derfor er vinkelen $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Lengden er $r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$. Innsatt i formelen ovenfor:

$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{6}i}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{9\pi}{6}i}.$$

c) Tallet 2 ligger på den positive reelle aksene. Derfor er vinkelen $0 + 2\pi k$. Lengden er $r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$. Innsatt i formelen ovenfor:

$$\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{2}i}, \sqrt[4]{2}e^{\pi i}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

d) Tallet $2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ligger på linjen $x = y$ i det komplekse planet. Derfor skjønner vi at vinkelen er $\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. Lengden er $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$. Innsatt i formelen ovenfor:

$$2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{9\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{17\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{25\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{33\pi}{20}i}$$

1.3. Vi skriver hvert uttrykk på kartesisk form:

a)

$$\begin{aligned} z^4 &= (a + ib)^4 = (a + ib)^2(a + ib)^2 \\ &= (a^2 + 2iab + i^2b^2)(a^2 + 2iab + i^2b^2) \\ &= (a^2 - b^2 + 2iab)^2 \\ &= (a^2 - b^2)^2 + 2(a^2 - b^2)(2iab) + 4i^2a^2b^2 \\ &= (a^4 - 6a^2b^2 + b^4) + 4i(a^3b - ab^3) \end{aligned}$$

Dette betyr at vi har realdel $a^4 - 6a^2b^2 + b^4$ og imaginærdel $4(a^3b - ab^3)$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + ib} = \frac{1(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} \\ &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Realdel: $\frac{a}{a^2 + b^2}$.

Imaginærdel: $\frac{-b}{a^2 + b^2}$.

c)

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= \frac{a+ib-1}{a+ib+1} = \frac{(a-1)+ib}{(a+1)+ib} \\ &= \frac{((a-1)+ib)((a+1)-ib)}{((a+1)+ib)((a+1)-ib)} \\ &= \frac{(a-1)(a+1) - ib(a-1) + ib(a+1) - i^2b^2}{(a+1)^2 + b^2} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - 1) + 2ib}{(a+1)^2 + b^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a+1)^2 + b^2} + i \frac{2b}{(a+1)^2 + b^2} \end{aligned}$$

Realdel: $\frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2}$.

Imaginærdel: $\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}$.

d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \frac{1}{(a+ib)^2} = \frac{1}{(a^2-b^2)+2iab} \\ &= \frac{(a^2-b^2)-2iab}{((a^2-b^2)+2iab)((a^2-b^2)-2iab)} \\ &= \frac{a^2-b^2}{((a^2-b^2)^2+(2ab)^2)} + i \frac{-2ab}{((a^2-b^2)^2+(2ab)^2)} \\ &= \frac{a^2-b^2}{a^4+2a^2b^2+b^4} + i \frac{-2ab}{a^4+2a^2b^2+b^4} \end{aligned}$$

Realdel: $\frac{a^2-b^2}{a^4+2a^2b^2+b^4}$.

Imaginærdel: $\frac{-2ab}{a^4+2a^2b^2+b^4}$.

1.4. Husk at

$$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Realdel: $r \cos \theta$.

Imaginærdel: $r \sin \theta$.

a)

$$\begin{aligned} z^4 &= (re^{i\theta})^4 = r^4 e^{i4\theta} \\ &= r^4 \cos(4\theta) + i \sin(4\theta) \end{aligned}$$

Det betyr at vi har realdel $r^4 \cos(4\theta)$ og imaginær del $r^4 \sin(4\theta)$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \\ &= \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \\ &= \frac{1}{r} (\cos(\theta) - i \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Det betyr at vi har realdel $\frac{1}{r} \cos(\theta)$ og imaginær del $-\frac{1}{r} \sin(\theta)$.

1.5.

a) Vi har at $(z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$ slik at $z = 1$ er en trippelrot.

Aletrnativt kan du gjette på løsningen $z = 1$ og deretter bruke polynomdivisjon.

b)

Fra a) har vi at ligningen kan skrives på formen

$$(z-1)^3 = 1 = e^{2\pi ki}.$$

Vi skal altså finn z slik at $z-1$ er en tredjerot av 1. Metoden beskrevet i oppgave 2.3. viser at tredjerøttene til 1 er

$$e^{\frac{2\pi}{3}}, e^{\frac{4\pi}{3}}, 1.$$

Dermed har vi tre løsninger for $z-1$ som igjen gir tre løsninger for z :

$$z = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}}, 1 + e^{\frac{4\pi}{3}}, 2.$$

Tredjerøttene til 1 ligger uniformt fordelt på sirkelen sentrert i origo med radius 1, men er forskjøvet til å ligge uniformt fordelt på sirkelen sentrert i $(1, 0)$ med radius 1.

1.6. Anta at w er en løsning. Da vet vi at

$$a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \dots + a_1 w + a_0 = 0.$$

Konjugering av hele ligningen gir

$$\overline{a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \dots + a_1 w + a_0} = 0.$$

Husk at $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, slik at:

$$a_n (\bar{w})^n + a_{n-1} (\bar{w})^{n-1} + \dots + a_1 (\bar{w}) + a_0 = 0.$$

Du skal vise at $(\bar{w})^n = \overline{w^n}$ på innleveringen, slik at

$$a_n \bar{w}^n + a_{n-1} \bar{w}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{w} + a_0 = 0.$$

Det betyr jo akkurat at \bar{w} er en løsning.

1.7. Ja, la det reelle tallet være 1 som eksempel (dette lar seg lett generalisere). n -terøttene til 1 er løsningene av polynomligningen $z^n = 1$. Forrige oppgave forteller oss at siden polynomet $z^n - 1$ har reelle koeffisienter kommer nullpunktene i konjugatpar.

Vi kan eventuelt argumentere direkte, f.eks som følger: La $z = re^{i\theta}$ tilfredsstill $z^n = 1$. Vi har $r^n * e^{ni\theta} = 1$. Da er $r^n = 1$ og $e^{ni\theta} = 1$ siden r er et positivt reelt tall, hvilket videre gir $r = 1$. Vi har $\bar{z}^n = r^n e^{-ni\theta} = (e^{ni\theta})^{-1} = 1^{-1} = 1$.

1.8.

a) Vi følger den vanlige metoden for å finne n -terøtter: Skriv 1 på polar form; $1 = e^{(2\pi k)i}$, k et heltall. Tredjerøttene til 1 er $e^{(\frac{2\pi k}{3})i}$, k heltall. Dette gir ulike komplekse tall for $k = 0, 1, 2$:

$$1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

Det er tre punkter uniformt fordelt på sirkelen sentrert i origo med radius 1. Dersom vi trekker rette linjer mellom punkter etter økende vinkel får vi en trekant med røttene som hjørner.

b) Fjerderøttene er på formen $e^{i \cdot \frac{2\pi k}{4}}$ for k et heltall. Vi tar $k = 0, 1, 2, 3$ og får

$$1, i, -1, -i.$$

Den geometriske figuren blir et kvadrat med hjørner i røttene.

c) Vi får at n -terøttene er $e^{i \frac{2\pi k}{n}}$ hvor $k = 0, 1, \dots, n-1$. Altså:

$$1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, \dots, e^{\frac{(n-1)\pi i}{n}}.$$

Den geometriske figuren blir en regulær n -gon med hjørner i røttene.

1.9. Skriv tallene på polarform, $z = r \cdot e^{i\theta}$, $w = \rho \cdot e^{i\phi}$, hvor $r \neq 0 \neq \rho$. Vi får $z \cdot w = r \cdot \rho \cdot e^{i(\theta+\phi)} \neq 0$ siden $r \cdot \rho \neq 0$.

1.10. Med ulikheten fra oppgaveteksten kan vi beregne slik:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

Så tar vi kvadratrotten.

1.11.

a) Vi ser at $\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$ og $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Produktet blir $\sqrt{8}e^{-i\pi/12}$.

b) $(\sqrt{3} + i)/(1 - i) = \sqrt{2}e^{5\pi i/12}$

1.12.

a) Euler gir: $e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4})$. Bruk at cos er en like funksjon og sin er en odde funksjon for å se at $e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \cos(\frac{3\pi}{4}) - i \sin(\frac{3\pi}{4})$. Nå kan vi regne ut at

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2i \sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

b) $\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = e^{i(\frac{3\pi}{4} - (-\frac{3\pi}{4}))} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

1.13.

a) Øvre halvplan uten den reelle aksen.

b) Kun origo.

c) Sirkel med radius 3 sentrert i origo.

d) Seks komplekse tall på sirkelen sentrert i origo med radius lik $\sqrt[6]{2}$: $\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

e) En linje som er parallell med den reelle aksen og skjærer den imaginære aksen i i .

1.14.

a) Bruk polarform: $z = re^{i\theta}$ og $w = \rho e^{i\phi}$. Da er:

$$\overline{z/w} = \overline{(r/\rho)e^{i(\theta-\phi)}} = (r/\rho)e^{i(-\theta-(-\phi))} = \bar{z}/\bar{w}$$

b) Bruk igjen polarform: $z = re^{i\theta}$

$$(\bar{z})^n = (re^{-i\theta})^n = r^n e^{-in\theta} = \overline{(z^n)}$$

c)

$$\begin{aligned} |z + w|^2 + |z - w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} + (z - w)\overline{(z - w)} \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= 2|z|^2 + 2|w|^2 \end{aligned}$$

1.15.

Dette er eksamensoppgave 1 fra høsten 2015, fasit ligger på wikisiden.

Den første kan løses ved å sette z på polarform, skal få alle tall på formen $z = re^{\frac{3\pi i}{4}}$ eller $z = re^{-\frac{\pi i}{4}}$.

Den andre kan løses ved å se at $z = 0$ ikke er en løsning, og så løse $(\frac{z-1}{z})^4 = w^4 = 1$. Sett så $\frac{z-1}{z} = w$, der w er fjerderøtter til 1, og se hvilke som kan funke. Man skal få $z = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}(1 + i)$, $z = \frac{1}{2}(1 - i)$.