# Løsningsforslag ekstraoppgaver 13

**14.1.** La $v = y'$. Vi bruker oppsettet på side 2 i notatet om andreordens differensialligninger (kapittel 14).

**a)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$

**b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$

**14.2.**

**a)** Vi setter opp systemet på samme måte som i forrige oppgave:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'.$$

Vi finner egenverdiene til matrisen ved å løse ligningen $\det(\lambda I - A) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda(\lambda - 1) - 2 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \end{aligned}$$

Ved å bruke abc-formelen får vi

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

Med andre ord har matrisen egenverdiene

$$\lambda_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ og } \lambda_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Det følger at den generelle løsningen er

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

.

**b)** Vi setter opp systemet på samme måte som i forrige oppgave:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'.$$

Strategien er den samme som i forrige deloppgave. Karakteristisk polynom er

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1$$

som har røttene $\lambda_1 = i$ og $\lambda_2 = -i$. Siden egenverdiene er komplekse, følger det at den generelle løsningen er

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t).$$

**c)** Vi skriver om ligningen til systemet

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$$

Løsningen er

$$y = (c_1 + tc_2)e^{2t}.$$

**14.3.** I begge deloppgavene bruker vi at hvis

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

er en løsning av ligningen

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0,$$

så vil en partikulærløsning av ligningen

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

være

$$\begin{aligned} y_p(t) = y_2 &\int \frac{y_1(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)} dt \\ - y_1 &\int \frac{y_2(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)} dt. \end{aligned}$$

**a)** Vi vet fra forrige oppgave at en homogen løsning av

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = te^t$$

er

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}.$$

Dermed får vi $f(t) = te^t, y_1(t) = e^{2t}, y_2(t) = e^{-t}, y_1'(t) = 2e^{2t}$ og $y_2'(t) = -e^{-t}$. Innsatt i formelen for $y_p(t)$ får vi

$$\begin{aligned} y_p(t) &= e^{-t} \int \frac{e^{2t} \cdot te^t}{-e^{2t}e^{-t} - 2e^{-t}e^{2t}} dt \\ &\quad - e^{2t} \int \frac{e^{-t} \cdot te^t}{-e^{2t}e^{-t} - 2e^{-t}e^{2t}} dt \\ &= -\frac{e^{-t}}{3} \int te^{2t} dt + \frac{e^{2t}}{3} \int te^{-t} dt \\ &\overset{(*)}{=} -\frac{e^{-t}}{3} \left( \frac{1}{2} te^{2t} - \int \frac{1}{2} e^{2t} dt \right) \\ &\quad + \frac{e^{2t}}{3} \left( -te^{-t} + \int e^{-t} dt \right) \\ &= -\frac{1}{2} te^t - \frac{1}{4} e^t. \end{aligned}$$

Ved likhetstegnet merket med $(*)$ er det brukt delvis integrasjon.

**b)** Vi vet fra forrige oppgave at en homogen løsning av

$$y''(t) + y(t) = \cos(t)$$

er

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t).$$

Dermed får vi $f(t) = \cos(t), y_1(t) = \cos(t), y_2(t) = \sin(t), y_1'(t) = -\sin(t)$ og $y_2'(t) = \cos(t)$. Innsatt i formelen for $y_p(t)$ får vi

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \sin(t) \int \frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} dt \\ &\quad - \cos(t) \int \frac{\sin(t)\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} dt \\ &= \sin(t) \int \cos^2(t) dt \\ &\quad - \cos(t) \int \sin(t)\cos(t) dt \\ &= \sin(t) \int \frac{1}{2}\Big(\cos(2t) + 1\Big) dt \\ &\quad - \cos(t) \int \frac{1}{2}\sin(2t) dt \\ &= \frac{1}{4}\cos(t) + \frac{1}{2} t \sin(t). \end{aligned}$$

$\frac{1}{4}\cos(t)$ er en homogen løsning og partikulærløsningen er dermed $y_p(t) = \frac{1}{2} t \sin t$.

**14.4.**

**a)** Fra oppgave 14.2 har vi den generelle løsningen $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$. Vi bruker følgende trigonometriske identitet:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

og får at

$$\cos(t+2) = \cos(t)\cos(2) - \sin(t)\sin(2).$$

Vi ser at denne løsningen er på riktig form, med $c_1 = \cos(2)$ og $c_2 = -\sin(2)$, og konkluderer med at $\cos(t+2)$ ligger i løsningsrommet.

**b)** Fra forrige deloppgave fikk vi at

$$\cos(t+2) = \cos(t)\cos(2) - \sin(t)\sin(2).$$

Dersom vi setter $c_1 = \cos(2)$ og $c_2 = -\sin(2)$, så får vi koordinatene til $\cos(t+2)$ med hensyn på basisen til løsningsrommet.

**14.5.**

**a)** Fra oppgave 14.2 har vi generell løsning

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}.$$

Initialverdiene gir

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0, \\ y'(0) &= 2c_1 - c_2 = 1. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

og løsningen på initialverdiproblemet er

$$y = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t}).$$

**b)** Fra oppgave 14.2 har vi generell løsning

$$y = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t).$$

Initialverdiene gir

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= c_2 = 1, \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -c_1 = 0. \end{aligned}$$

Løsningen på initialverdiproblemet er dermed

$$y = \sin(t).$$

**c)** Fra oppgave 14.2 har vi generell løsning

$$y = (c_1 + tc_2)e^{2t}.$$

Initialverdiene gir

$$\begin{aligned} y(1) &= c_1 e^2 + c_2 e^2 = 0, \\ y'(0) &= 2c_1 + c_2 = -e^{-2}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-2} \\ e^{-2} \end{bmatrix},$$

og løsningen på initialverdiproblemet er

$$y = (t-1)e^{2(t-1)}.$$

**14.6.** Vi har de homogene løsningene fra Oppgave 14.2. Vi trenger altså bare å finne partikulærløsningene. Vi gjør noen kvalifiserte gjett som vi setter inn i ligningene.

**a)** Prøv $y = ae^{-2t}$ for å finne

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{4} e^{-2t}.$$

**b)** Prøv $y = ate^{2t}$ for å finne

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3} te^{2t}.$$

**c)** Prøv $at$ for å finne

$$y = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + t.$$

**d)** Prøv $at + b$ for å finne

$$y = (c_1 + tc_2)e^{2t} + t + 1.$$

**14.7.** Vi ser at polynomene blir like.

Bevis: Betrakt en generell likning $y'' + py' + qy = 0$. Det karakteristiske polynomet er $\lambda^2 + p\lambda + q$. Vi kan generelt skrive tilhørende system som

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$$

hvor $v = y'$. Det karakteristiske polynomet til matrisen blir

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -q & -p - \lambda \end{bmatrix} = \lambda(p + \lambda) + q = \lambda^2 + p\lambda + q.$$

Polynomene er like.

## Eksamensoppgaver

Vår 2017: Oppgave 2
Vår 2017: Oppgave 3
Høst 2017: Oppgave 4
Kont 2018: Oppgave 7
Vår 2018: Oppgave 7
Høst 2019: Oppgave 2