Løsningsforslag ekstraoppgaver 12

13.1. I dette kurset ser vi på to tilfeller; enten hvor vi har to reelle men ulike egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$, eller hvor vi har to komplekse egenverdier $\lambda = \alpha \pm \beta i$. I reelle tilfellet får vi en løsning på formen $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, mens i det komplekse tilfellet får vi en løsning på formen $y(t) = e^{\alpha t}($ en lineærkombinasjon av $\cos(\beta t)$ og $\sin(\beta t)$).

I det reelle tilfellet er det tre ulike situasjoner. Dersom $\lambda > 0$ så vil løsningene til systemet ligge langs den tilhørende egenvektoren, men begeve seg bort fra origo. Dersom $\lambda = 0$ så vil løsningene til systemet ligge i ro på den tilhørende egenvektoren. Dersom $\lambda < 0$ så vil løsningene til systemet ligge langs den tilhørende egenvektoren, men begeve seg mot origo.

Anta først at vi har $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Da får vi løsninger som ligger langs de tilhørende egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, men for store verdier av t så vil $\mathbf{v}_1$ dominere. Derfor får vi en ustabil likevektsløsning ut i fra origo med hovedvekt i samme retning som $\mathbf{v}_1$. For $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ får vi noe tilsvarende, men denne gangen får vi en ustabil likevektsløsning mot origo med hovedvekt i samme retning som $\mathbf{v}_1$. Dersom vi har $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ så vil $\mathbf{v}_1$ dominere når $-\infty < t < 0$ og $\mathbf{v}_2$ dominere når $0 < t < \infty$. Dette gjør at vi får en sadel om origo. Se figur i eksempel 13.11 og 13.12 i notatene. Alt dette skjer fordi (generelt) $e^{\lambda t}$ er det dominerende ledded i løsningen.

I det komplekse tilfellet vil $e^{\lambda t}$ leddet sørge for skalering, mens $\cos(\beta t)$ og $\sin(\beta t)$ sørge for rotasjon. Følgelig får vi for $\alpha = 0$ et sirkulært fasediagram, for $\alpha > 0$ får vi en spiral ut ifra origo og for $\alpha < 0$ får vi en spiral inn mot origo. Se figur i eksempel 13.20 i notatene for spiraler som er sirkulære og utgående fra origo, og se figur i eksempel 13.19 i notatene for sirkulære baner om origo. For å finne orienteringen til spiralene eller sirkelene så kan vi for eksempel beregne $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ (for matrisen A som representerer differentialligningen) og se hvilken vei resultatet går. Dette blir da orienteringen til fasediagrammet.

a) Egenverdiene er 3 og -1, derfor får vi en sadel om origo. Se figur i eksempel 13.11 og 13.12 i notatene.

b) Egenverdiene er $-1 + i\sqrt{2}$ og $-1 - i\sqrt{2}$, derfor får vi spiraler som beveger seg mot origo. Vi har at

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}.$$

Fra dette ser vi at spiralen går mot klokka.

c) Egenverdiene er $1 + \sqrt{2}$ og $1 - \sqrt{2}$, derfor får vi en sadel om origo. Se figur i eksempel 13.11 og 13.12 i notatene.

d) Egenverdiene er $-1 + 2i$ og $-1 - 2i$, og vi får spiraler som går mot origo. Vi har at

$$A = \begin{bmatrix}-7 & 10\\-4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\-4\end{bmatrix}.$$

Da følger det at spiralen går med klokka.

13.2.

a) Vi finner først egenverdiene ved å finne røttene til det karakteristiske polynomet $\det(\lambda I - A)$, dvs. løse ligningen $\det(\lambda I - A) = 0$.

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \det\left(\begin{bmatrix}\lambda+6 & 11 & -16\\-2 & \lambda-5 & 4\\4 & 5 & \lambda-10\end{bmatrix}\right)\\ &= (\lambda+6)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-5 & 4\\5 & \lambda-10\end{bmatrix}\right)\\ &- 11\cdot\det\left(\begin{bmatrix}-2 & 4\\4 & \lambda-10\end{bmatrix}\right)\\ &+ (-16)\cdot\det\left(\begin{bmatrix}-2 & \lambda-5\\4 & 5\end{bmatrix}\right)\\ &= \lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24 = 0.\end{aligned}$$

Litt prøving og feiling gir at $\lambda_1 = 2$ er en løsning av ligningen (og dermed en egenverdi). Dermed må $(\lambda - 2)$ være en faktor i $\det(\lambda I - A)$. Polynomdivisjon gir

$$(\lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24) : (\lambda - 2) = \lambda^2 - 7\lambda + 12.$$

Vi finner nullpunktene til $\lambda^2 - 7\lambda + 12$ ved hjelp av den gode gamle abc-formelen:

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{(7^2 - 4\cdot 12)}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}.$$

Dermed er de to siste egenverdiene

$$\lambda_2 = \frac{7-1}{2} = 3 \text{ og } \lambda_3 = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Vi finner så egenvektorene på vanlig måte, ved å løse ligningen $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for hver verdi av λ.
$\lambda_1 = 2$ gir et system med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c}8 & 11 & -16 & 0\\-2 & -3 & 4 & 0\\4 & 5 & -8 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -4 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Så løsningen er

$$\mathbf{x} = s\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

og en passende egenvektor er

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = 3$ gir et system med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 11 & -16 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Så løsningen er

$$\mathbf{x} = s \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og en passende egenvektor er

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_3 = 4$ gir et system med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 11 & -16 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Så løsningen er

$$\mathbf{x} = s \cdot \begin{bmatrix} 7/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

For å unngå brøker lar vi $s = 3$ og sier at en passende egenvektor er

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dermed er en generell løsning gitt ved

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

b) Fremgangsmåten og tankegangen her er den samme som i forrige deloppgave. Egenverdier er $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$. Da får vi egenvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir oss den generelle løsningen:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

13.3.

a) Vi har fra tidligere at

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

Gitt initialverdiene så får vi systemet

$$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

eller skrevet på en annen måte:

$$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 + 7c_3 = 1 \\ \quad - \ c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_1 + \ c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases}$$

Systemet har totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Løsningen er dermed $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = -1$.

b) Vi har fra tidligere at

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Gitt initialverdiene så får vi systemet

$$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller skrevet på en annen måte:

$$\begin{cases} -4c_1 - 6c_2 - c_3 = 1 \\ \quad c_1 + \ c_2 \qquad = -1 \\ \quad 4c_1 + 5c_2 + c_3 = 1 \end{cases}$$

Systemet har totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -6 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right].$$

Løsningen er dermed $c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = 7$.

13.4. Tegn kurver som (ca) har pilene i vektorfeltet som tangenter. Tegningen burde ligne litt på den i eksempel 13.12.

13.5. Vi ber kun om en skisse. Kvalitativt er det bare fortegnene til egenverdiene som spiller noen rolle. Det holder derfor å finne egenverdiene for å se hvordan systemet oppfører seg.

a) Egenverdiene er -1 og 1, derfor får vi en sadel om origo. Se figur i eksempel 13.11 og 13.12 i notatene.

b) Egenverdiene er 4 og 6, derfor får vi en ustabil likevektsløsning. Se figur i eksempel 13.15 i notatene.

c) Egenverdiene er $-2+i$ og $-2-i$. Siden realdelen til egenverdiene er negative, og imaginærdelen er ulik 0, får vi innadgående spiraler. Se figur i eksempel 13.20 i notatene (bare med motsatt orientering).

d) Egenverdiene er $3i$ og $-3i$. Siden realdelen er null vil ikke avstanden fra origo forandre seg langs løsningskurvene. Siden imaginærdelen er ulik 0 vil imidlertid argumentet forandre seg. Vi får sirkulære baner om origo. Se figur i eksempel 13.19 i notatene.

13.6. En generell løsning til systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ når A er en $n \times n$-matrise er på formen

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t},$$

der λ_i-ene er egenverdiene til A og $\mathbf{v}_i$-ene er tilhørende egenvektorer. En basis for løsningsrommet er

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \cdots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}.$$

Vi finner egenverdier på vanlig måte ved å finne røttene til det karakteristiske polynomet til A, altså løse ligningen $\det(\lambda I - A) = 0$. Egenvektor(er) tilhørende egenverdi λ_i finner vi ved å løse $(\lambda_i I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Under gir vi løsningen på hver deloppgave.

a)

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix}25\\15\\6\end{bmatrix} e^{5t}$$

b)

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} e^{-4t}$$

13.7.

a) Fra forrige oppgave har vi generell løsning

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix}25\\15\\6\end{bmatrix} e^{5t}.$$

Initialverdien gir

$$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}25\\15\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Dette gir oss følgende ligningssystem:

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 + 25c_3 = 1 \\ \qquad c_2 + 15c_3 = 0 \\ \qquad\qquad 6c_3 = 0 \end{cases},$$

som har løsning

$$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Løsningen på initialverdiproblemet er altså

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} e^{2t}.$$

.

b) Fra forrige oppgave vet vi at den generelle løsningen er

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} e^{-4t}.$$

Initialverdien gir

$$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Dette gir oss følgende ligningssystem:

$$\begin{cases} c_1 - 2c_2 + \ \ c_3 = 1 \\ c_1 \qquad\ + 3c_3 = -1 \\ \qquad c_2 - 2c_3 = 1 \end{cases}$$

som har løsning

$$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1/3\\-2/3\end{bmatrix}.$$

Løsningen på initialverdiproblemet er altså

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} e^{2t} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} e^{2t} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} e^{-4t}.$$

13.8. Vi har sett at den generelle løsningen er

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} e^{-4t}.$$

Det gjenstår kun å bestemme koeffisientene fra initialverdiene:

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} = \mathbf{y}_0.$$

Dette kan skrives som en matriselikning

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{c} = \mathbf{y}_0$$

hvor $\mathbf{c} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$. Du kan sjekke at denne matrisen er inverterbar. Dermed er det et entydig valg av koeffisienter c_1, c_2 og c_3; løsningen er dermed entydig ettersom den generelle løsningen inneholder alle løsninger.

13.9.

a) Egenverdi $\lambda_1 = 2$ gir egenvektor $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ og egenverdi $\lambda_2 = -1$ gir egenvektor $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$. Det følger at den generelle løsninger er $y = c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} e^{-t}$.

b) Vi deriverer og ser at $y = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}e^{-2t}\end{bmatrix}$ ikke er en løsning av systemet, og at $y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2e^{-2t}\\e^{-2t}\end{bmatrix}$ er en løsning av systemet.

c) Den generelle løsningen for systemet blir da $y = c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} e^{2t} + c_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2e^{-2t}\\e^{-2t}\end{bmatrix}$.

Eksamensoppgaver

Vår 2017: Oppgave 6
Høst 2017: Oppgave 5
Høst 2018: Oppgave 3
Kont 2019: Oppgave 4