Løsningsforslag ekstraoppgaver 8

9.1. Vi bruker indreproduktet definert i Teorem 9.22. Vi beregner vinkelen som definert under Teorem 9.7.

a) Det følger at

$$\langle -x, e^x \rangle = -\int_0^1 xe^x dx = -1 \neq 0.$$

Indreproduktet er lik -1, og funksjonene er dermed ikke ortogonale.

Vi får at lengdene er

$$\| -x \| = \sqrt{\langle -x, -x \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

og

$$\| e^x \| = \sqrt{\langle e^x, e^x \rangle} = \sqrt{\int_0^1 e^{2x} dx} = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}.$$

Det følger at vinkelen er

$$\begin{aligned}\Theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\langle -x, e^x \rangle}{\| -x \| \| e^x \|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)}}\right) \\ &= 165.7^\circ\end{aligned}$$

Vi konkluderer at funksjonene er nesten parallelle, men går i motsatt retning av hverandre. Husk at $\Theta \approx 0^\circ$ betyr at de er ca parallelle, $\Theta \approx 90^\circ$ betyr at de er ca ortogonale og $\Theta \approx 180^\circ$ parallelle i motsatte retninger.

b) Det følger at

$$\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x - \sin x \rangle = \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{3}x)(x - \sin x) dx = 0.012.$$

Indreproduktet er ulik 0, og funksjonene er dermed ikke ortogonale.

Vi får at lengdene er

$$\begin{aligned}\| x^3 - \frac{1}{3}x \| &= \sqrt{\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x^3 - \frac{1}{3}x \rangle} \\ &= \sqrt{\int_0^1 (x^3 - \frac{1}{3}x)^2 dx} \\ &\approx 0.216\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\| x - \sin x \| &= \sqrt{\langle x - \sin x, x - \sin x \rangle} \\ &= \int_0^1 (x - \sin x)^2 dx \\ &\approx 0.061.\end{aligned}$$

Det følger at vinkelen er

$$\begin{aligned}\Theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x - \sin x \rangle}{\| x^3 - \frac{1}{3}x \| \| x - \sin x \|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{0.012}{0.216 \cdot 0.061}\right) \\ &= \cos^{-1}(0.91) \\ &= 24.49^\circ.\end{aligned}$$

Vi konkluderer at funksjonene er nesten parallelle.

c) Vi har at $\langle x, x^2 - \frac{3}{4}x \rangle = \int_0^1 x(x^2 - \frac{3}{4}x) dx = 0$. Indreproduktet er lik 0, og funksjonene er dermed ortogonale. Det følger også at vinkelen $\Theta = 90^\circ$.

9.2. Vi bruker Gram-Schmidt for å finne en ortogonal basis. La $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi setter $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1$ og regner ut $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \frac{8}{5}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 18 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$. Vi projiserer vektoren $(i, 2+i, 1)$ ned på hver basisvektor og summerer, slik Teorem 9.13 sier vi kan. Da får vi følgende litt hårete utregning:

$$\begin{aligned}P_{\mathbf{U}} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} &= P_{\mathbf{u}_1} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} + P_{\mathbf{u}_2} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4+3i \\ 8+6i \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{430} \begin{bmatrix} -234+162i \\ 117-81i \\ -65+45i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{86} \begin{bmatrix} 22+84i \\ 161+87i \\ -13+9i \end{bmatrix}\end{aligned}$$

9.3.

a) La $\mathbf{v}_1 = 1$. La så $\mathbf{v}_2 = x - \frac{\langle 1, x \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x - \frac{1}{2}$. Til slutt la $\mathbf{v}_3 = x^2 - \frac{\langle 1, x^2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\langle x - \frac{1}{2}, x^2 \rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle} \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Da utgjør $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ en ortogonal basis for $\text{Sp}\{1, x, x^2\}$.

b) Dette er ikke samme svar som Eksempel 9.33 i notatet, men det gjør ingenting. Det finnes selvsagt mange ortogonale basiser for et gitt indreproduktrom.

9.4.

a) Ved å regne ut på samme måte som tidligere i denne øvingen så får vi følgende lengder:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\|x^2\| = \sqrt{\langle x^2, x^2\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\|x^3\| = \sqrt{\langle x^3, x^3\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^6 dx} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$\|x^4\| = \sqrt{\langle x^4, x^4\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^8 dx} = \frac{1}{\sqrt{9}},$$

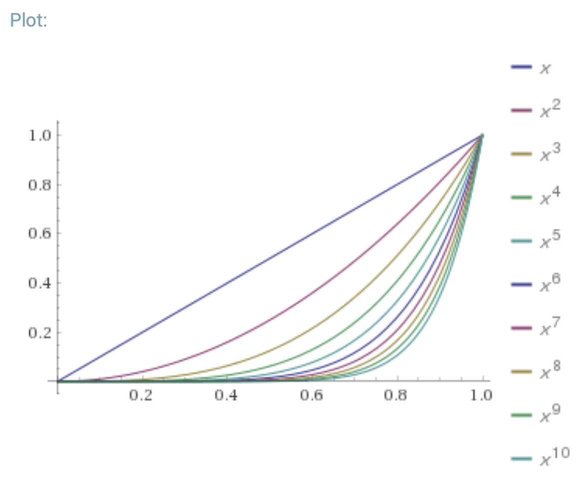
$$\|x^5\| = \sqrt{\langle x^5, x^5\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^{10} dx} = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

b) Generelt får vi:

$$\|x^n\| = \sqrt{\langle x^n, x^n\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^{2n} dx} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Vi ser dermed at når $n \to \infty$ så $\|x^n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$.

c) Følgende figur illustrerer grafen til x^n når n vokser. Arealet under grafen minsker, og dermed minsker også lengden til x^n.



9.5.

a) Skalarproduktet av de to vektorene er:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -8$$

Vektorene er ikke ortogonale.

b) Vi ser på skalarproduktet til hvert par av vektorer:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Alle de tre vektorene er ortogonale til hverandre.

9.6.

a) Vi bruker Gram–Schmidt-ortogonalisering, og får:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - P_{\mathbf{u}_1} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/15 \\ 2/3 \\ 4/15 \end{bmatrix}$$

Da er $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)$ en ortogonal basis. Vi kan kvitte oss med brøkene ved å sette $\mathbf{u}_2 = 15\mathbf{v}_2$. $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ er selvsagt også ortogonal.

b) Vi har fra oppgave 5b at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

allerede er ortogonale, så vi behøver ikke gjøre noe.

9.7.

a) Vi bruker den ortogonale basisen $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ fra forrige oppgave. Kall rommet de utspenner for U, og sett $v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Da er $P_U = P_{\mathbf{u}_1} + P_{\mathbf{u}_2}$.

$$\begin{aligned} P_U(v) &= \frac{\langle v, \mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle v, \mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2\rangle}\mathbf{u}_2 \\ &= \frac{5}{86}\begin{bmatrix} 28 \\ 29 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Siden de tre vektorene fra 5b) er ortogonale, er rommet de spenner ut, U, hele $\mathbb{R}^3$. Dermed blir $P_U = P_{\mathbb{R}^3} = Id_{\mathbb{R}^3}$.

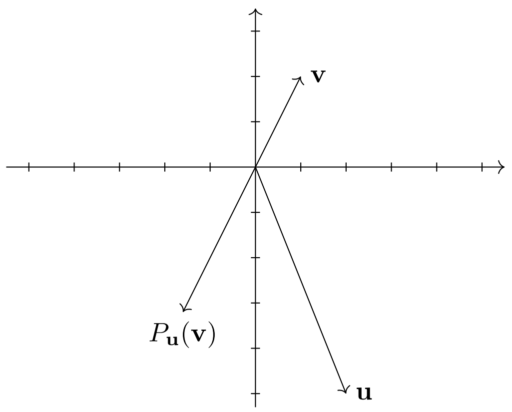
9.8. Projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ er:

$$P_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{u}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-5)}{1^2 + 2^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/5 \\ -16/5 \end{bmatrix}$$

Vinkelen Θ mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er:

$$\begin{aligned} \Theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{v}^*\mathbf{u}}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{5}}\right) \\ &\approx \cos^{-1}(-0.66) \approx 131.6°. \end{aligned}$$

Dette betyr at $\mathbf{u}$ ligger ca. midt i mellom av å være ortogonal/vinkelrett til $\mathbf{v}$ og å være paralell (i motsatt retning) til $\mathbf{v}$. Vi ser fra fortegnet av projisjonen at $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$ går i motsatt retning av $\mathbf{v}$. Figuren under illustrerer dette.



9.9.

a)

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{11}{9}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}.$$

og

$$\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} - \frac{11}{9}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}5\\-4\\-2\end{bmatrix}.$$

b)

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

og

$$\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix}.$$

c) Vi vet fra teorem 9.11 at $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ og $\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ er ortogonale,så indreproduktet mellom de to vektorene vil i alle tilfellene bli 0.

9.10. Vi bruker Gram-Schmidt-metoden for å gjøre den definerende basisen $\{1, e^x\}$ ortogonal. Husk at indreproduktet vi bruker er integral av produkt av funksjoner, som beskrevet i oppgaven. Vi setter $u_1 = 1$, og regner ut

$$u_2 = e^x - \frac{\langle e^x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1 = e^x - e + 1.$$

Da har vi en ortogonal basis $\{1, e^x - e + 1\}$.

9.11.

a) Vi har det samme indreproduktet som i forrige oppgave, og to like vektorer, så vi kan igjen sette $u_1 = 1$ og få $u_2 = e^x - e + 1$. Da trenger vi u_3, og Gram-Schmidt gir

$$\begin{aligned}u_3 &= x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1 - \frac{\langle x, e^x - e + 1\rangle}{\langle e^x - e + 1, e^x - e + 1\rangle}\cdot(e^x - e + 1)\\ &= x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e-1}.\end{aligned}$$

b) For å finne projeksjonen av en vektor ned i et plan må man projisere den ned på en ortogonal basis som spenner ut planet. Det har vi, fra forrige oppgave, og regner ut

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_V\, h(x) &= \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1 + \frac{\langle x^2, e^x - e + 1\rangle}{\langle e^x - e + 1, e^x - e + 1\rangle}\cdot(e^x - e + 1)\\ &\quad + \frac{\langle x^2, x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e-1}\rangle}{\langle x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e-1}, x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e-1}\rangle}\cdot(x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e-1})\\ &= \frac{1}{3} - \frac{4e - 10}{3(e-3)(e-1)}(e^x - e + 1)\\ &\quad + (12 - 12e)\frac{\frac{1}{e-1} - \frac{7}{12}}{19 - 7e}(x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e-1})\\ &= \frac{1}{3} - \frac{4e - 10}{3(e-3)(e-1)}(e^x - e + 1)\\ &\quad - (x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e-1})\\ &\approx \frac{1}{3} + 0,601(e^x - e + 1)\\ &\quad - (x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e-1})\end{aligned}$$

Når det kommer til skissen, er poenget at projeksjonen av x^2 ned i V skal være den funksjonen spent ut av $\{1, x, e^x\}$ som "ligner mest" på x^2. Fordi vi har både x og e^x til disposisjon, kan vi få til noe som ligner ganske mye, og hvis vi plotter $g(x)$ i WolframAlpha, vil vi faktisk se at den er nesten identisk med x^2. Så godkjenn alt som viser to veldig like funksjoner.

Eksamensoppgaver

Vår 2019: Oppgave 6
Kont 2019: Oppgave 2
Kont 2019: Oppgave 7
Høst 2019: Oppgave 5ab