Løsningsforslag ekstraoppgaver 7

9.1. Vi beregner de 3 indreproduktene og ser at

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en ortogonal mengde. Alle ortogonale mengder er lineært uavhengige (Teorem 9.10). Siden vi her har tre lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$ er de en basis for $\mathbb{R}^3$.

Når vi vet at vi har en ortogonal basis, vet vi at en vektor $v \in \mathbb{R}^3$ kan skrives slik:

$$v = \frac{\langle v, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle}\mathbf{b}_2 + \frac{\langle v, \mathbf{b}_2 \rangle}{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle}\mathbf{b}_2 + \frac{\langle v, \mathbf{b}_3 \rangle}{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3 \rangle}\mathbf{b}_3$$

Koeffisientene til vektoren $(1, 1, 1)$ med hensyn på basisen $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ blir altså $(1/3, 2/3, 0)$.

9.2. Det ortogonale komplementet til dette underrommet er alle vektorer som er ortogonale på de to vektorene. Det vil si, alle vektorer slik at prikkproduktet med de to gitte vektorene blir 0. Ettersom vi er gitt to vektorer i $\mathbb{R}^3$ så kan komplementet spennes ut av en vektor. Vi kan enkelt prøve oss frem for å finne en slik vektor på formen $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a + c = 0.$$

og

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = -a + 2c = 0.$$

Her ser vi fra første ligning at $a = -c$. Men i andre ligning ser vi at $a = 2c$. Den eneste løsningen på de to ligningene er at $a = c = 0$. Derimot kan b være hva som helst. Det ortogonale komplementet er dermed et underrom som spennens ut av vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

9.3.

a) Den ortogonale projeksjonen er:

$$P_{\mathbf{v}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

b) Kolonnene til standardmatrisen $[P_{\mathbf{v}}]$ består av prosjeksjonen til standardbasisen i $\mathbb{R}^3$. Vi regner ut:

$$P_{\mathbf{v}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

og

$$P_{\mathbf{v}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi får at:

$$[P_{\mathbf{v}}] = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

c) Matrisen er ikke injektiv fordi alle vektorer som står ortogonalt på $\mathbf{v}$ vil sendes til nullvektoren, og dermed består nullrommet til $[P_{\mathbf{v}}]$ av mer enn bare nullvektoren selv.

Matrisen er ikke surjektiv fordi den kun spenner ut linjen som spennes ut av vektoren $\mathbf{v}$ selv.

d) Fra oppgave c så vet vi at $\operatorname{im} P_{\mathbf{v}} = \operatorname{Sp} \mathbf{v}$. Denne har dimensjon lik 1. Vi vet at $\operatorname{im} P_{\mathbf{v}} = \operatorname{Col}[P_{\mathbf{v}}]$ fordi $[P_{\mathbf{v}}]$ er standardmatrisen til $P_{\mathbf{v}}$. Dermed har begge dimensjon lik 1.

Fra Teorem 9.17 har vi at det ortogonale komplementet til ei linje i $\mathbb{R}^3$ er todimensjonalt. $\ker P_{\mathbf{v}}$ er nettopp det ortogonale komplementet til $\operatorname{Sp} \mathbf{v}$ og er altså 2-dimensjonalt. Nullrommet til $[P_v]$ er lik kjernen til P_v.

9.4.

a) Skalarproduktet av de to vektorene er:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -8$$

Vektorene er ikke ortogonale.

b) Vi ser på skalarproduktet til hvert par av vektorer:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} = 0$$

Alle de tre vektorene er ortogonale til hverandre.

9.5.

a) Vi bruker Gram–Schmidt-ortogonalisering, og får:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}\\ \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} - P_{\mathbf{u}_1}\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}23/15\\2/3\\4/15\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Da er $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)$ en ortogonal basis. Vi kan kvitte oss med brøkene ved å sette $\mathbf{u}_2 = 15\mathbf{v}_2$. $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ er selvsagt også ortogonal.

b) Vi har fra oppgave 4 at vektorene

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$$

allerede er ortogonale, så vi behøver ikke gjøre noe.

9.6.

a) Vi bruker den ortogonale basisen. Kall rommet $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ er ortogonal basis for U, og sett $v := \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

Da er $P_U = P_{\mathbf{u}_1} + P_{\mathbf{u}_2}$.

$$\begin{aligned}P_U(v) &= \frac{\langle v, \mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle v, \mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2\rangle}\mathbf{u}_2\\ &= \frac{5}{86}\begin{bmatrix}28\\29\\3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

b) Siden de tre vektorene fra 4b) er ortogonale er rommet de spenner ut, U, hele $\mathbb{R}^3$. Dermed blir $P_U = P_{\mathbb{R}^3} = Id_{\mathbb{R}^3}$.

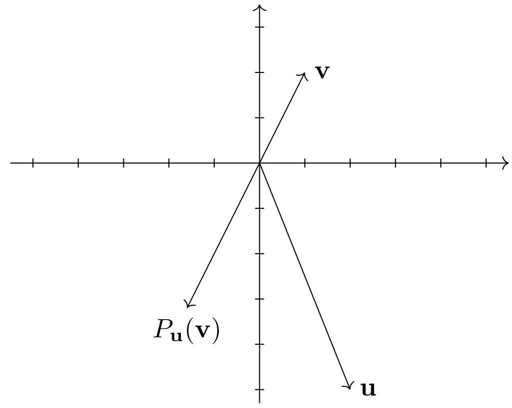
9.7. Projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ er:

$$P_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{u}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-5)}{1^2 + 2^2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8/5\\-16/5\end{bmatrix}$$

Vinkelen Θ mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er:

$$\begin{aligned}\Theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{v}^*\mathbf{u}}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||}\right)\\ &= \cos^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{5}}\right)\\ &\approx \cos^{-1}(-0.66) \approx 131.6°.\end{aligned}$$

Dette betyr at $\mathbf{u}$ ligger ca. midt i mellom av å være ortogonal/vinkelrett til $\mathbf{v}$ og å være paralell (i motsatt retning) til $\mathbf{v}$. Vi ser fra fortegnet av projisjonen at $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$ går i motsatt retning av $\mathbf{v}$. Figuren under illustrerer dette.



9.8.

a)

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{11}{9}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}.$$

og

$$\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} - \frac{11}{9}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}5\\-4\\-2\end{bmatrix}.$$

b)

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

og

$$\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix}.$$

c) Vi vet fra teorem 9.11 at $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ og $\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ er ortogonale,så indreproduktet mellom de to vektorene vil i alle tilfellene bli 0.

9.9. Vi bruker Gram-Schmidt-metoden for å gjøre den definerende basisen $\{1, e^x\}$ ortogonal. Husk at indreproduktet vi bruker er integral av produkt av funksjoner, som beskrevet i oppgaven. Vi setter $u_1 = 1$, og regner ut

$$u_2 = e^x - \frac{\langle e^x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = e^x - e + 1.$$

Da har vi en ortogonal basis $\{1, e^x - e + 1\}$.

9.10.

a) Vi har det samme indreproduktet som i forrige oppgave, og to like vektorer, så vi kan igjen sette

$u_1 = 1$ og få $u_2 = e^x - e + 1$. Da trenger vi u_3, og Gram-Schmidt gir

$$\begin{aligned} u_3 &= x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle x, e^x - e + 1\rangle}{\langle e^x - e + 1, e^x - e + 1\rangle} \cdot (e^x - e + 1) \\ &= x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e - 1}. \end{aligned}$$

b) For å finne projeksjonen av en vektor ned i et plan må man projisere den ned på en ortogonal basis som spenner ut planet. Det har vi, fra forrige oppgave, og regner ut

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_V h(x) &= \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 + \frac{\langle x^2, e^x - e + 1\rangle}{\langle e^x - e + 1, e^x - e + 1\rangle} \cdot (e^x - e + 1) \\ &\quad + \frac{\langle x^2, x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e-1}\rangle}{\langle x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e-1}, x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e-1}\rangle} \cdot (x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e - 1}) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4e - 10}{3(e - 3)(e - 1)}(e^x - e + 1) \\ &\quad + (12 - 12e)\frac{\frac{1}{e-1} - \frac{7}{12}}{19 - 7e}(x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e - 1}) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4e - 10}{3(e - 3)(e - 1)}(e^x - e + 1) \\ &\quad - (x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e - 1}) \\ &\approx \frac{1}{3} + 0,601(e^x - e + 1) \\ &\quad - (x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{e - 1}) \end{aligned}$$

Når det kommer til skissen, er poenget at projeksjonen av x^2 ned i V skal være den funksjonen spent ut av $\{1, x, e^x\}$ som "ligner mest" på x^2. Fordi vi har både x og e^x til disposisjon, kan vi få til noe som ligner ganske mye, og hvis vi plotter $g(x)$ i WolframAlpha, vil vi faktisk se at den er nesten identisk med x^2. Så godkjenn alt som viser to veldig like funksjoner.

Eksamensoppgaver

Høst 2015: Oppgave 6
Høst 2018: Oppgave 6
Vår 2019: Oppgave 2b