Oppgave 1 Vi skriver ligningssystemet på utvidet matriseform og utfører gausseliminasjon (uten detaljer):

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dette gir at z er en fri variabel og at alle løsningene er på formen

$$x = 3 + t, \qquad y = 1 - 2t \qquad \text{og} \qquad z = t \qquad \text{med } t \in \mathbb{R}.$$

Oppgave 2 Vi skriver først $1 - \mathrm{i}$ på polarform

$$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)\mathrm{i}}, \qquad \text{med } n \in \mathbb{Z},$$

som gir at

$$(1 - \mathrm{i})^{12} = 2^6 \mathrm{e}^{(-3\pi + 24\pi n)\mathrm{i}} = 2^6 \mathrm{e}^{(-\pi + 2\pi n)\mathrm{i}},$$

hvor vi i den siste overgangen benyttet at $\mathrm{e}^{2\pi k \mathrm{i}} = 1$ for en hvilken som helst $k \in \mathbb{Z}$. Det gir at røttene til $\sqrt[4]{(1 - \mathrm{i})^{12}}$ blir på formen

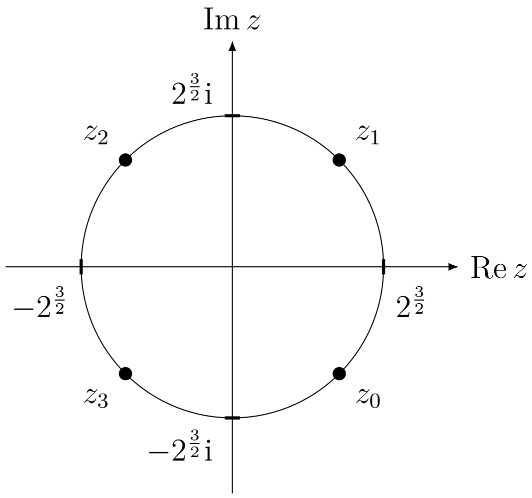
$$z_n = 2^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n\right)\mathrm{i}} \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, 3.$$

Med andre ord,

$$z_0 = 2^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = 2(\ \ 1 - \mathrm{i}), \qquad z_1 = 2^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = 2(1 + \mathrm{i}),$$

$$z_2 = 2^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} = 2(-1 + \mathrm{i}), \qquad z_3 = 2^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{5\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = -2(1 + \mathrm{i}),$$

som i det komplekse planet ser slik ut:



Oppgave 3 Vi løser først den homogene ligningen

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

som har karakteristisk ligning $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ med dobbelrot $\lambda = 2$, hvilket gir generell løsning

$$y_{\mathrm{h}}(t) = A\mathrm{e}^{2t} + Bt\mathrm{e}^{2t}$$

for den homogene ligningen, hvor $A, B \in \mathbb{R}$ er vilkårlige konstanter. For å finne partikulærløsningen y_{p} assosisert med den inhomogene ligningen kan vi bruke ubestemte koeffisienters metode, som gir kandidaten

$$y_{\mathrm{p}}(t) = Ct^2 + Dt + E,$$

hvor vi merker oss at høyresiden $t^2 + 1$ i ligningen ikke forekommer i y_{h}. Innsetting av y_{p} i ligningen gir kravet

$$4Ct^2 + (4D - 8C)t + 2C - 4D + 4E = y_{\mathrm{p}}''(t) - 4y_{\mathrm{p}}'(t) + 4y_{\mathrm{p}}(t) = t^2 + 1,$$

hvilket betyr at $C = 1/4$, $D = 2C = 1/2$ og $E = 5/8$. Den generelle løsningen blir dermed

$$y(t) = y_{\mathrm{h}}(t) + y_{\mathrm{p}}(t) = A\mathrm{e}^{2t} + Bt\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{8}\left(2t^2 + 4t + 5\right), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Oppgave 4 Elementære radoperasjoner gir at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

slik at vi har pivotelementer i kolonnene 1 og 3 og dermed får en basis for Col A på formen

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Løsningene på $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ kan skrives som

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2s - 5t \\ s \\ -3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} t, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

siden vi har frie parametre i kolonnene 2 og 4 i den radreduserte versjonen av A, hvilket betyr at en basis for Null A er

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Siden $\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Null}(A^\top) = \#\text{rader i } A = 3$ og $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = 2$, konkluderer vi med $\dim \operatorname{Null}(A^\top) = 1$.

Oppgave 5 $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ og $A\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ gir at egenverdiene respektivt blir 1 og $\frac{3}{2}$.

Siden initialverdiproblemet har A som koeffisientmatrise, hvor vi kjenner egenverdiene og tilhørende egenvektorer, blir generell løsning

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} = A\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + B\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

for koeffisienter $A, B \in \mathbb{R}$, som vi finner ved å løse ligningssystemet

$$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$$

for initialverdiene ved $t = 0$. Det gir $A = -3$ og $B = 2$, hvorpå

$$x_1(t) = -3\mathrm{e}^t + 4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t} \qquad \text{og} \qquad x_2(t) = -3\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t}.$$

Oppgave 6 Observér først at $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ og at $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. De lineære egenskapene til T gir så at at

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}.$$

Dermed kan vi også regne ut

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}.$$

Oppgave 7 Vi lager først en ortogonal basis $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ for V ved hjelp av Gram–Schmidts metode:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \widetilde{\boldsymbol{v}_2} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_1 \right\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle}\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

Vi kan la $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{3}{2}\widetilde{\boldsymbol{v}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ for å få en enklest mulig basis (skalering har ingenting å si for ortogonalitet). Siden vi nå har en ortogonal basis for V, finner vi at projeksjonen blir

$$P_V(\boldsymbol{b}) = P_{\boldsymbol{v}_1}(\boldsymbol{b}) + P_{\boldsymbol{v}_2}(\boldsymbol{b}) = \frac{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle}\boldsymbol{v}_1 + \frac{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle}\boldsymbol{v}_2 = \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-3}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Til slutt skal vi finne minste kvadraters-løsningen til $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, som vil si å finne vektoren $\widehat{\boldsymbol{x}}$ som minimerer avstanden $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$. Avstanden er minst når $A\widehat{\boldsymbol{x}}$ er lik projeksjonen av $\boldsymbol{b}$ ned på $\operatorname{Col} A$—men $\operatorname{Col} A$ er jo nettopp V, så denne projeksjonen var svaret på første del av oppgaven. Altså gjenstår det å løse ligningen

$$A\widehat{\boldsymbol{x}} = P_{\operatorname{Col} A}(\boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

som ved gausseliminasjon gir oss $\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}$. Alternativt kan man løse normalligningen $A^\top A\widehat{\boldsymbol{x}} = A^\top \boldsymbol{b}$ direkte.

Oppgave 8 Vi introduserer notasjonen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

slik at matriseligningen blir $BAC = D$. Det gir at

$$\begin{aligned} A = B^{-1}DC^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

hvor vi for enkelthets skyld ikke skriver ut utregningene av de inverse matrisene i detalj (dette gjøres ved standard gausseliminasjon).

Oppgave 9 La $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ være to andregradspolynom og $c \in \mathbb{R}$ være en skalar. Vi husker at derivasjon er en lineær operasjon, slik at

$$(p+q)'(x) = p'(x) + q'(x) \qquad \text{og} \qquad (p+q)''(x) = p''(x) + q''(x)$$

og

$$(cp)'(x) = cp'(x) \qquad \text{og} \qquad (cp)''(x) = cp''(x).$$

Det betyr at

$$T(p+q) = \begin{bmatrix} (p+q)(0) \\ (p+q)'(1) \\ (p+q)''(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0)+q(0) \\ p'(1)+q'(1) \\ p''(2)+q''(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q(0) \\ q'(1) \\ q''(2) \end{bmatrix} = T(p) + T(q)$$

og

$$T(cp) = \begin{bmatrix} (cp)(0) \\ (cp)'(1) \\ (cp)''(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cp(0) \\ cp'(1) \\ cp''(2) \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix} = cT(p),$$

som viser at T er en lineærtransformasjon.

Kjernen til T består av alle andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ slik at $T(p) = \boldsymbol{0}$. Vi regner ut

$$T(p) = \begin{bmatrix} c \\ 2a+b \\ 2a \end{bmatrix}$$

og får at $T(p) = \boldsymbol{0}$ inntreffer hvis og bare hvis $c = 0$, $a = 0$ og dermed også $b = 0$—med andre ord, hvis og bare hvis $p(x) = 0$. Konklusjon: $\ker T = \{0\}$ (det trivielle andregradspolynomet).

Oppgave 10 Vi kan anta at B er en $m \times k$-matrise og at AB er en $\ell \times \ell$ kvadratisk matrise. Siden AB antas å være veldefinert, må vi ha at $n = k = \ell$ og $1 = m$. Altså er B en $1 \times n$-matrise med én rad og n kolonner og AB en $n \times n$-matrise med n rader og n kolonner.

Hvis $n = 1$, får vi at $AB = a_1 b_1$, med $A = \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix}$. Siden vi antar at $AB \neq 0$, betyr det at AB har rang lik 1.

Hvis $n > 1$, kan vi generelt skrive

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

for passende koeffisienter a_i og b_i for $1 \leqslant i \leqslant n$. Matriseproduktet AB blir da lik

$$AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1B \\ a_2B \\ \vdots \\ a_nB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1A & b_2A & \cdots & b_nA \end{bmatrix}$$

med andre ord består radene i AB av skalerte kopier av radvektoren B, mens kolonnene i AB består av skalerte kopier av kolonnevektoren A. Uansett hvilken av de to representasjonene vi ser på, betyr dette at AB kun har én lineært uavhengig rad og kun én lineært uavhengig kolonne, med mindre AB er null-matrisen. En basis for $\mathrm{Row}(AB)$ er derfor $\{B\}$, mens en basis for $\mathrm{Col}(AB)$ er $\{A\}$.

Konklusjon: $\operatorname{rank} AB = 1$ (med mindre AB er null-matrisen, som vi antar ikke er tilfellet).