Oppgavene 1–6, 7a), 7b), 8 og 9 teller alle likt.

Oppgave 1 For hvilke verdier $a \in \mathbb{R}$ er matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2a & -4 \\ a & 1 & -a \end{bmatrix}$$

inverterbar?

Oppgave 2 Regn ut $\operatorname{Re} z$ og $\operatorname{Im} z$ når

$$z = \mathrm{i}^{\left(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^4} - 3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}.$$

Skriv svaret på enklest mulig måte.

Oppgave 3 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Finn en basis for $\operatorname{Col} A$ og $\operatorname{Null} A$.
- Har systemet
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
løsning for enhver $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$? Hvis det har en løsning for en spesifikk $\boldsymbol{b}$, er denne løsningen da unik? Begrunn svaret.

Oppgave 4 Løs initialverdiproblemet

$$y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = 9t, \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$$

Oppgave 5 Anta at $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$ er lineært uavhengige vektorer i et vektorrom V. Vis at de tre vektorene

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}, \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$$

også er lineært uavhengige.

Oppgave 6 La $V \subseteq \mathbb{R}^3$ betegne det lineære spennet $\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$.

- Finn en ortogonal basis for V.
- Beregn den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$ ned på V.

Oppgave 7 La A være matrisen

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}.$$

a) • Finn alle egenverdiene til A og • regn ut A^{31}.

b) • Løs initialverdiproblemet

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t), \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{bmatrix}7\\0\\3\end{bmatrix}$$

og • bestem $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t)$ hvis grensen eksisterer.

Oppgave 8 Benytt minste kvadraters metode til å finne andregradspolynomet

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

som minimerer avstanden til datapunktene

x	-1	0	1	2
y	1	-2	0	5

(Det vil si, finn a, b og c.)

Oppgave 9 La $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ betegne vektorrommet av reelle $n \times n$-matriser og la

$$\mathcal{S}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ A^\top = A\right\} \qquad (A^\top \text{ er den transponerte av } A).$$

- Bestem en basis for $\mathcal{S}_n$ når $n = 2$.
- Finn $\dim \mathcal{S}_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.