NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Brynjulf Owren[a], Dag Wessel-Berg[b], Franz Luef[c]

Tlf:

Eksamensdato: 20. mai 2022

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt, enkel kalkulator tillatt. Ingen skrevne eller trykte hjelpemidler.

Annen informasjon:
Faglærer går ikke rundt på eksamen. Bruk telefon for kontakt om eventuelle uklarheter i oppgaveteksten.
Alle oppgaver teller like mye.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 14

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Finn alle løsninger av ligninga

$$z^4 + 5z^2 + 4 = 0.$$

Løsning: La $w = z^2$. Ligningen blir dermed

$$w^2 + 5w + 4 = (w+4)(w+1) = 0,$$

og vi har løsningene $w_1 = -1$ og $w_2 = -4$. Siden $-1 = e^{i\pi + 2\pi n}$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, får vi

$$\begin{cases} z = \sqrt{w_1} = e^{\frac{i\pi + 2\pi i n}{2}} = e^{\frac{i\pi}{2} + i\pi n} = \pm i, \\ z = \sqrt{w_2} = 4^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi + 2\pi i n}{2}} = 2e^{\frac{i\pi}{2} + i\pi n} = \pm 2i. \end{cases}$$

Dette gir løsningene $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 2i$ og $z_4 = -2i$.

Oppgave 2 La $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, og la V være mengden $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = 0\}$.

Vis at V er et underrom av $\mathbb{R}^3$, og finn en basis for det ortogonale komplementet $V^\perp$.

Løsning: Vi ønsker å vise at V er et underrom. Vi må vise at $\mathbf{0} \in V$, og at V er lukket under skalarmultiplikasjon og vektoraddisjon. Siden $\mathbf{a}^T\mathbf{0} = 0$, så har vi at $\mathbf{0} \in V$. Videre, om $\alpha \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$, følger det fra lineariteten til matrisemultiplikasjon at

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{a}^T\mathbf{v} + \mathbf{a}^T\mathbf{u} = 0 + 0 = 0,$$

og

$$\mathbf{a}^T\alpha\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a}^T\mathbf{v} = 0.$$

Dette viser at V er et underrom.

Velg en vilkårlig vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, og la v_i for $i \in \{1, 2, 3\}$ være komponentene til vektoren. Da vil

$$\mathbf{a}^T\mathbf{v} = 3v_1 + v_2 + v_3,$$

og dette er null dersom $3v_1 = -v_2 - v_3$. Dermed er en basis for V gitt ved

$$\mathcal{B}_V = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right).$$

Observer nå at $\mathbf{a}$ står ortogonalt på begge disse, så $\mathcal{B}_V \cup \{\mathbf{a}\}$ må være en basis for $\mathbb{R}^3$ og dermed er $\{\mathbf{a}\}$ en basis for $V^\perp$.

Alternativt: V er gitt som alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ som står ortogonalt på $\mathbf{a}$, så V vil være et plan med $\mathbf{a}$ som normalvektor. Dermed $V^\perp = \text{span}\{\mathbf{a}\}$.

Oppgave 3 La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4i & 4-4i \\ i & -2 & 2+i \\ 1+i & -2+2i & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for kolonnerommet (søylerommet) til A, og en basis for nullrommet til A.

Løsning: Ved radreduksjon får vi

$$\begin{bmatrix} 2 & 4i & 4-4i \\ i & -2 & 2+i \\ 1+i & -2+2i & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser dermed at kolonnerommet er gitt ved første og tredje kolonne

$$\text{Col}(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4-4i \\ 2+i \\ 2 \end{bmatrix} \right),$$

mens nullrommet er gitt ved

$$\text{Null}(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Denne oppgaven kan også løses uten å radredusere, dersom man legger merke til at første og andre kolonne er lineært avhengig. Nemlig,

$$2i \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i \\ -2 \\ -2+2i \end{bmatrix}.$$

For en vilkårlig vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$, gir matrisemultiplikasjon

$$Av = \begin{bmatrix} 2 & 4i & 4-4i \\ i & -2 & 2+i \\ 1+i & -2+2i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (v_1 + 2iv_2) \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 4-4i \\ 2+i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dette gir kolonnerommet direkte, og vi ser at

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4-4i \\ 2+i \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

Videre kan vi legge merke til at $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $v_1 = -2iv_2$, og $v_3 = 0$, som gir

$$\mathrm{Null}(A) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Oppgave 4 Bestem om funksjonene

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \sin(x),$$

er ortogonale i indreproduktsrommet $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$, når indreproduktet er definert ved

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Hvis ikke, finn en ortogonal basis for det lineære spennet $\mathrm{span}(f_1, f_2, f_3)$ ved å bruke Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetode.

Løsning: Vi starter med å sjekke om noen av funksjonen er ortogonale. Merk at x og $\sin(x)$ er odde funksjoner, og dermed følger det at

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0, \quad \langle f_1, f_3\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx = 0.$$

Det vil si at f_1 står ortogonalt på f_2 og f_3, men f_2 og f_3 står ikke ortogonalt på hverandre, ettersom

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)dx = 2\pi \neq 0.$$

Vi bruker Gram-Schmidt for å finne en ortogonal basis. La den første vektoren være

$$e_1(x) = \frac{f_1(x)}{\sqrt{\langle f_1, f_1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

Siden f_1 og f_2 er ortogonale, så er også e_1 og f_2 ortogonale. Dermed følger det at

$$e_2(x) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{\langle f_2, f_2 \rangle}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi^3}}x.$$

Vi finner en tredje ortogonal funksjon via Gram-Schmidt prosessen, la oss kalle den $g(x)$, ved

$$g(x) = f_3(x) - \langle e_1, f_3 \rangle e_1(x) - \langle e_2, f_3 \rangle e_2(x) = f_3(x) - \langle e_2, f_3 \rangle e_2(x) = \sin(x) - \frac{3}{\pi^2}x.$$

Vi har nå funnet tre ortogonale funksjoner $\{e_1, e_2, g\}$ gitt ved

$$e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad e_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2\pi^3}}x, \quad g(x) = \sin(x) - \frac{3}{\pi^2}x.$$

Siden oppgaven kun spør etter en ortogonal basis for spennet, trenger vi ikke å normalisere den siste funksjonen.

Oppgave 5 Bruk minste kvadraters metode for å finne en tilnærmet løsning på det overbestemte ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 3x - 2y &= 1 \\ -x + 3y &= 6. \end{aligned}$$

Løsning: Vi bruker minste kvadrater metode for å finne en tilnærming av løsningen. Minste kvadraters metode er gitt ved å løse ligningen

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.$$

Vi starter med å finne matrisen A^T, hvor matrisen A er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

og dermed er den transponerte matrisen gitt ved

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matrisemultiplikasjon gir

$$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

Vi finner løsningen ved å radredusere totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & -7 & 7 \\ -7 & 14 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{array}\right].$$

Løsningen på minste kvaderaters metode er gitt ved

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Eller skrevet komponentvis $x = \frac{5}{3}$ og $y = \frac{7}{3}$.

Oppgave 6 La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen definert ved

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} - 2\mathbf{x},$$

der $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Finn matrisa A som oppfyller $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

La $\mathcal{B}$ være en basis for $\mathbb{R}^2$ gitt ved $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$, og $\mathcal{E}$ være standardbasisen, $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Finn matrisa P som oppfyller $P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$.

Finn også matrisa B som oppfyller $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, og vis at $AP = PB$.

Husk: $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ *er koordinatvektoren til* $\mathbf{x}$ *med hensyn på basisen* $\mathcal{B}$

Løsning: Vi starter med å se hvordan transformasjonen T transformerer en tilfeldig vektor $\mathbf{x}$,

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = T(\mathbf{x}) = \frac{2x_1 + 2x_2}{4+4}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3x_1 + x_2}{2} \\ \frac{x_1 - 3x_2}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi ser dermed at matrisen A er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Vi ønsker nå å finne matrisen P som transformerer fra basis $\mathcal{B}$ til standardbasisen $\mathcal{E}$. Vi kan merke oss at

$$\left[\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

så vi har at hvis

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

så må

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P\left[\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Litt mer kortfattet kan vi observere at hvis $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ så er $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$, der $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$. Altså

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Dermed er matrisen P gitt ved

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vi ønsker nå å finne matrisen B som beskriver transformasjonen T i basisen $\mathcal{B}$. Vi kan huske at $P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$. Dermed har vi,

$$B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}} = P^{-1}A[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = P^{-1}AP[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}},$$

som gir at $B = P^{-1}AP$, og oppfyller dermed $AP = PB$. Den inverse matrisen til P er gitt ved

$$P^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Setter vi alt sammen, får vi matrisen

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{16}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{5}{26} & -\frac{23}{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -32 & 24 \\ 5 & -46 \end{bmatrix}.$$

Alternativt: Hvis

$$B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

så må

$$\begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B\left[\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \left[T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{B}}$$

og

$$\begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{B}}$$

Vi regner ut

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{-16}{13}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{5}{26}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} = \frac{12}{13}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{-23}{13}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Altså

$$B = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -32 & 24 \\ 5 & -46 \end{bmatrix}$$

Oppgave 7 La A være en reell 3×3-matrise. Vi får oppgitt at

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Bestem egenverdiene til A og tilhørende egenvektorer, og begrunn hvorfor A er diagonaliserbar. Finn så en diagonalisering av A, og beregn

$$A^{2022}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Løsning: Fra den oppgitte informasjonen ser vi

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-3\\-3\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

Dermed vet vi at matrisen A har tre distinkte egenverdier $\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=2$, hvor de tilhørende egenvektorene er gitt ved

$$E_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

Matrisen er diagonaliserbar siden den har tre distinkte egenverdier.

Vi ønsker å finne en diagonalisering av matrisen. Om vi legger merke til at alle egenvektorene står ortogonalt på hverandre, så kan vi normere egenvektorene og finne en diaognalisering,

$$A=U\Lambda U^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}.$$

Derifra, har vi

$$\begin{aligned}A^{2022}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=U\Lambda^{2022}U^T\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-3)^{2022}&0&0\\0&0&0\\0&0&2^{2022}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-3)^{2022}&0&0\\0&0&0\\0&0&2^{2022}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}(-3)^{2022}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\0\\0\end{bmatrix}\\&=(-3)^{2022}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Det er også mulig å diagonalisere matrisen uten å normalisere egenvektorene. Da er diagonaliseringen på formen,

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

hvor P er matrisen med egenvektorene som kolonner. Det vil si

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan finne den inverse matrisen ved å radredusere

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Diagonaliseringen er dermed gitt ved

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Vi kan nå regne ut

$$\begin{aligned} A^{2022} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = P\Lambda^{2022}P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^{2022} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2022} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^{2022} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2022} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (-3)^{2022} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (-3)^{2022} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativt: Vi observerer at

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og dermed

$$A^{2022}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} = A^{2022}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + A^{2022}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = (-3)^{2022}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Oppgave 8 Vi ser på flytting mellom byene A-by, B-by og C-by. Hvert år blir

- 80% av befolkningen værende igjen i A-by, 15% flytter fra A-by til B-by, og 5% flytter fra A-by til C-by.
- 90% av befolkningen værende igjen i B-by, 5% flytter fra B-by til A-by, og 5% flytter fra B-by til C-by.
- 80% av befolkningen værende igjen i C-by, 10% flytter fra C-by til A-by, og 10% flytter fra C-by til B-by.

Anta det totale innbyggertallet i A-by, B-by og C-by er 100 000 og at ingen fødes eller dør.

Hvor mange mennesker bor henholdsvis i A-by, B-by og C-by i det lange løp (når tiden går mot uendelig)?

Løsning: Vi setter opp overgangsmatrisen M

$$M = \begin{bmatrix}0,8 & 0,05 & 0,1\\0,15 & 0,9 & 0,1\\0,05 & 0,05 & 0,8\end{bmatrix},$$

og finner likevektsvektoren ved å løse $(M-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi setter opp totalmatrisen og radreduserer

$$\begin{bmatrix}-0,2 & 0,05 & 0,1\\0,15 & -0,1 & 0,1\\0,05 & 0,05 & -0,2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -1,2\\0 & 1 & -2,8\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Dette gir at egenvektorene tilhørende egenverdien 1 er på formen

$$\mathbf{v} = t\begin{bmatrix}1,2\\2,8\\1\end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ettersom likevektsvektoren er en sannsynlighetsvektor må vi velge t slik at alle komponentene er positive og summerer til 1. Dette gir $t = 1/5$, og likevektsvektoren er gitt ved

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0,24 \\ 0,56 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$$

Dermed vil det i det lange løp vil det bo 24 000 mennesker i A-by, 56 000 mennesker i B-by og 20 000 mennesker i C-by.

Oppgave 9 La $x(t)$ og $y(t)$ være to kontinuerlig deriverbare reelle funksjoner, og a et reelt tall. Vi ser på ligningssystemet

$$x'(t) = x(t) + ay(t)$$
$$y'(t) = x(t).$$

Finn den generelle løsningen for systemet av differensialligninger for alle reelle tall a.

Løsning: Systemet svarer til

$$\mathbf{x}'(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Vi finner egenverdiene til A, ved $\det(A - \lambda I) = 0$, som gir likningen

$$\lambda^2 - \lambda - a = 0.$$

Løsningene er gitt ved

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

For $a > -1/4$ får vi to reelle egenverdier, mens for $a < -1/4$ er det to komplekse egenverdier som kommer i konjugatepar, altså $\lambda_+ = \overline{\lambda_-}$. Når $a = -1/4$ har matrisen kun 1 egenverdi, og vi må sjekket dette spesialtilfellet separat.

For å finne egenvektorene, setter vi inn og radreduserer. For å unngå problemer med radreduksjonen antar vi at $a \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_{\pm} & a \\ 1 & -\lambda_{\pm} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{1-\lambda_{\pm}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_{\pm} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

hvor vi brukte at $a = \lambda_\pm(\lambda_\pm - 1)$. Den generelle løsningen er dermed gitt ved

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{C_1 e^{\lambda_+ t}} \begin{bmatrix} \lambda_+ \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{C_2 e^{\lambda_- t}} \begin{bmatrix} \lambda_- \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C_1 e^{\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} t}} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{C_2 e^{\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} t}} \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dersom $a = 0$, så har vi egenverdiene $\lambda_+ = 1$ og $\lambda_- = 0$, med egenvektorene

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

og dermed er løsningen for $a = 0$ gitt ved

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{C_1 e^{t}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{C_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan legge merke til at disse løsningene sammensvarer ettersom

$$\lim_{a\to 0} \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} = 1, \quad \lim_{a\to 0} \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} = 0.$$

For tilfellet $a = -1/4$ har vi kun en reell egenverdi $\lambda = 1/2$. Den generelle løsningen er gitt ved

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{C_1 e^{\frac{1}{2} t}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{C_2 e^{\frac{1}{2} t}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} t + 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

Alternativt: Vi nevner også at denne kan løses som en andre ordensdifferentialligning, siden

$$y''(t) = x'(t) = x(t) + ay(t) = y'(t) + ay(t).$$

Den karakteristiske likningen blir dermed,

$$\lambda^2 - \lambda - a = 0,$$

og vi får

$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Dermed har vi løsningen på $y(t)$ gitt ved

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}.$$

Videre har vi at

$$x(t) = y'(t) = C_1 \lambda_+ e^{\lambda_+ t} + C_2 \lambda_- e^{\lambda_- t}.$$

Setter vi $x(t)$ og $y(t)$ inn i en vektor, og setter inn for egenverdiene, har vi

$$\mathbf{x} = \mathbf{x(t)} = \mathbf{C_1 e^{\lambda_+ t}} \begin{bmatrix} \lambda_+ \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{C_2 e^{\lambda_- t}} \begin{bmatrix} \lambda_- \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C_1 e^{\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} t}} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{C_2 e^{\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} t}} \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

For tilfellet $a = -1/4$, så har $y(t)$ løsningen

$$y(t) = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 t e^{\frac{t}{2}},$$

og $x(t)$ er dermed gitt ved

$$x(t) = y'(t) = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2} C_2 t e^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{\frac{1}{2}t}.$$

Kombinert i en felles vektor gir dermed

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{C_1 e^{\frac{1}{2}t}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{C_2 e^{\frac{1}{2}t}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t + 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

Oppgave 10 La $\mathcal{M}_3$ være vektorrommet av reelle 3×3-matriser, og la funksjonen $T : \mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_3$ være gitt ved

$$T(A) = A + A^T, \quad \text{for } A \in \mathcal{M}_3,$$

der A^T betegner den transponerte matrisa til A.

Vis at T er en lineærtransformasjon.

Vis at $\lambda = 0$ og $\lambda = 2$ er egenverdier for T.

Hva er de tilhørende egenrommene til disse to egenverdiene, og hva er dimensjonen til hvert av egenrommene? Kan T ha noen andre egenverdier?

Løsning: Vi sjekker om T er lineær. La $A, B \in \mathcal{M}_3$ og la $a, b \in \mathbb{R}$. Da får vi

$$\begin{aligned} T(aA + bB) = (aA + bB) + (aA + bB)^T &= aA + bB + aA^T + bB^T \\ &= a(A + A^T) + b(B + B^T) \\ &= aT(A) + bT(B), \end{aligned}$$

og dermed er T lineær.

For egenverdiene, la A være en symmetrisk matrise. Det vil si at $A = A^T$. Da har vi

$$T(A) = A + A^T = A + A = 2A,$$

så vi ser at alle symmetriske matriser er egenvektorer til A med egenverdi 2.

Anta nå at A er en anti-symmetrisk matrise, altså $A = -A^T$. Da har vi

$$T(A) = A + A^T = A - A = 0,$$

og dermed er anti-symmetriske matriser egenvektorer med egenverdi 0.

For dimensjonen til egenrommene kan vi merke at en symmetrisk matrise $A = [a_{ij}]$ må oppfylle $a_{ij} = a_{ji}$. Dermed vil en symmetrisk matrise ha 6 frie variabler, det er diagonalelementene og elementene over diagonalen. Vi kan dermed konkludere med at dimensjonen til rommet av symmetriske matriser er 6.

For anti-symmetriske matriser har vi $a_{ij} = -a_{ji}$. Dette impliserer at diagonalelementene er 0 siden $a_{ii} = -a_{ii}$ kan kun være oppfylt dersom $a_{ii} = 0$. Dermed har anti-symmetriske matriser 3 frie variabler, det er elementene over diagonalen, og dimensjonen på rommet av anti-symmetriske matriser er dermed 3.

Merk at snittet av symmetriske og anti-symmetriske matriser er kun null matrisen. For å vise dette anta at $A = [a_{ij}]$ er både en symmetrisk og anti-symmetrisk matrise. Da har vi $a_{ij} = a_{ji} = -a_{ij}$, som kun er oppfylt ved $a_{ij} = 0$ for alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Det vil si at A er null matrisen. Siden dimensjonen av alle 3×3 reelle matriser er 9, har vi at spennet av symmetriske og anti-symmetriske matriser er hele $\mathcal{M}_3$ og dermed kan det ikke være noen andre egenverdier enn 2 og 0.