NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110/TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Brynjulf Owren[a], Dag Wessel-Berg[b], Franz Luef[c]

Tlf: [a]930 21 641 , [b]92 44 88 28 , [c]406 14 405

Eksamensdato: 12. august

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt, enkel kalkulator tillatt. Ingen skrevne eller trykte hjelpemidler.

Annen informasjon:
Faglærer går ikke rundt på eksamen. Bruk telefon for kontakt om eventuelle uklarheter i oppgaveteksten.
Alle oppgaver teller like mye.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Finn alle løsninger av

$$z^4 = -8 + i8\sqrt{3}.$$

Skriv løsningen på formen $z = a + ib$, og skisser løsningene i det komplekse plan.

Svar:

Skriv om til polar form, $z^4 = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$

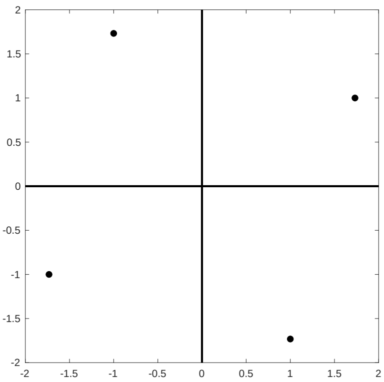
$$r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16, \quad \theta = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

Da er $z^4 = 16\,\mathrm{e}^{i(\frac{2}{3}+2k)\pi}$ som impliserer

$$z_k = 2\mathrm{e}^{i(\frac{1}{6}+\frac{k}{2})\pi}, \; k = 0, 1, 2, 3.$$

skrevet om til standard form fås da

$z_0 = \sqrt{3} + i, \; z_1 = -1 + i\sqrt{3}, \; z_2 = -\sqrt{3} - i, \; z_3 = 1 - i\sqrt{3}$



Oppgave 2 Gitt matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestem en matrise X slik at $AX = B$.

Svar: Hvis A er inverterbar har vi $X = A^{-1}B$. En teknikk benyttet i kurset er å benytte radreduksjon på totalmatrisen $(A|B)$ inntil det står $(I|A^{-1}B)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3 La A være en 3×5-matrise med rang 2. Finnes det en vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har en løsning $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$? Svaret skal begrunnes.

Svar: I en 3×5-matrise fins 5 kolonner som alle er vektorer i $\mathbb{R}^3$. Hvis matrisen har rang 2 betyr det at disse 5 kolonnene utspenner et to-dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^3$. Dermed må det fins vektorer i $\mathbb{R}^3$ som ikke tilhører kolonnerommet til A. Et eksempel på en slik vektor er $\mathbf{b} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (vektor kryssprodukt) der $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige vektorer i kolonnerommet til A. Siden $A\mathbf{x}$ er med i kolonnerommet til A for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ er det ikke mulig at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan ha en løsning hvis $\mathbf{b}$ ikke er med i A sitt kolonnerom.

Oppgave 4 Følgende ligningssystem er gitt

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x + 4y &= 2 \\ 4x + 6y &= 3. \end{aligned}$$

Bruk minste kvadraters metode for å finne en tilnærmet løsning, og sjekk om denne løser ligningene eksakt.

Svar: Ligningene skrives på matriseform som $Ax = b$ der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Den tilnærmede løsningen oppfyller normalligningene $A^T Ax = A^T b$ som vi finner er

$$\begin{bmatrix} 26 & 38 \\ 38 & 56 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Denne løses på vanlig måte, og en får $x = 0,\ y = \frac{1}{2}$. Setter vi denne tilnærmede løsningen tilbake i det opprinnelige systemet finner vi at den eksakt oppfyller ligningene, siden høyresiden b er nøyaktig lik $\frac{1}{2}$ multiplisert med A sin andre kolonne.

Oppgave 5 Anta at x_k er andelen av nordmenn som velger å feriere i utlandet i år k, og y_k er andelen som foretrekker norgesferie i samme år. Hvert år vil:

20% av de som valgte utenlandsferie legge ferien til Norge i det etterfølgende året

10% av de som valgte norgesferie vil ta ferien i utlandet året etter.

Finn matrisa A som oppfyller

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

Finn så likevektsfordelingen (når $k \to \infty$).

Svar: Fra de oppgitte overgangene kan vi skrive

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Likevektsfordelingen framkommer ved å normalisere en ikke-triviell løsning til systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ som er ekvivalent med

$$\begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi finner at $y = 2x$ og at generell løsning er av formen $x = t, y = 2t$ for vilkårlig valgt t. Krever vi at komponentene skal summere til 1 får vi at $t = \frac{1}{3}$ med tilhørende løsning $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$. Dette betyr da at når $k \to \infty$ vil $\frac{1}{3}$ av nordmenn feriere i utlandet, mens $\frac{2}{3}$ av tar norgesferie.

Oppgave 6 La

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Finn en inverterbar matrise P slik at $P^{-1}AP$ blir en diagonalmatrise.

Eksisterer det en ortogonal matrise Q med determinant 1 slik at Q^TAQ er en diagonalmatrise? Begrunn svaret.

Svar: Vi finner egenverdiene som røttene til polynomet

$$\det(A - \lambda I) = (9 - \lambda)(16 - \lambda) - 144 = \lambda^2 - 25\lambda$$

dvs $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 25$. Tilhørende $\lambda = 0$ finner vi egenvektoren $\mathbf{v}_1 = [\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]^T$. Tilhørende $\lambda = 0$ finner vi egenvektoren $\mathbf{v}_2 = [-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]^T$ som er et ortonormalt system. P kan velges som matrisen med $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ som kolonner dvs

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Da blir $P^{-1}AP = P^TAP = D$ der D er en diagonalmatrise med diagonalelementer λ_1 og λ_2.

Siden A er symmetrisk har den reelle egenverdier og egenvektorene kan velges ortogonale og så normeres slik at matrisen $P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ er ortogonal. Siden $\det(P) = \det(P^T)$ er

$$1 = \det(I) = \det(P^TP) = \det(P^T)\det(P) = \det(P)^2$$

så enten er $\det(P) = 1$ eller $\det(P) = -1$ for ortogonale matriser. Hvis $\det(P) = 1$ er vi framme. Hvis $\det(P) = -1$ kan vi erstatte P med $\tilde{P}$ der en av kolonnene har skiftet fortegn, for eksempel i vårt tilfelle kan vi sette

$$\tilde{P} = [\mathbf{v}_1 \ \ -\mathbf{v}_2]$$

Fremdeles er $\tilde{P}$ ortogonal og alle (begge) kolonnene er fremdeles egenvektorer, men nå endres fortegnet til determinanten så $\det(\tilde{P}) = 1$. Svaret er ja.

Oppgave 7 Løs initialverdiproblemet

$$y'' + y' - 6y = e^{-3t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Svar: Vi starter med å finne homogen løsning slik at $y'' + y' - 6y = 0$. Med $y(t) = e^{rt}$ fås $r^2 + r - 6 = 0$ med røtter $r_1 = -3$ og $r_2 = 2$. Så homogen løsning er

$$y_h(t) = C_1 \mathrm{e}^{-3t} + C_2 \mathrm{e}^{2t}$$

La nå $y_1(t) = \mathrm{e}^{-3t}$ og $y_2(t) = \mathrm{e}^{2t}$ være to valg av homogene løsninger og la høyresiden være $f(t) = e^{-3t}$. For å finne en partikulærløsning bruker vi formelen

$$y_p(t) = y_2(t) \int \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}\, dt - y_1(t) \int \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}\, dt, \quad W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

Vi beregner $W(t) = \mathrm{e}^{-3t} 2e^{2t} - (-3)\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{e}^{2t} = 5\mathrm{e}^{-t}$. Da blir

$$y_p(t) = \mathrm{e}^{2t} \int \frac{\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{e}^{-3t}}{5\mathrm{e}^{-t}}\, dt - e^{-3t} \int \frac{\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-3t}}{5\mathrm{e}^{-t}}\, dt = -\tfrac{1}{25}\mathrm{e}^{-3t} - \tfrac{1}{5} t\mathrm{e}^{-3t}$$

Vi finner løsningen ved å sette $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ og velge C_1 og C_2 slik at $y(0) = y'(0) = 0$. Det krever at $y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{25} = 0$ og $y'(0) = -3C_1 + 2C_2 - \frac{2}{25} = 0$ som gir $C_1 = 0$ og $C_2 = \frac{1}{25}$ og dermed er løsningen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \tfrac{1}{25}\left(\mathrm{e}^{2t} - (1 + 5t)\mathrm{e}^{-3t}\right)$$

Oppgave 8 La $\mathcal{C}([0, \pi])$ være vektorrommet av alle reelle kontinuerlige funksjoner $f(x)$ for $x \in [0, \pi]$, med indreprodukt definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$$

Vis at $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \sin(2x)$ er en ortogonal basis for underrommet $W \subseteq \mathcal{C}([0, \pi])$ utspent av f_1 og f_2. Finn så den ortogonale projeksjonen av $f(x) = x$ inn i underrommet W.

Hint: Her kan du få bruk for

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b)).$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Svar: La oss først vise at $\langle \sin x, \sin 2x \rangle = 0$. Husk at $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ så

$$\langle \sin x, \sin 2x \rangle = \int_0^\pi 2\sin^2 x \cos x\, dx = \int_0^\pi \frac{2}{3} \frac{d}{dx} \sin^3 x\, dx = \frac{2}{3} \sin^3 x \bigg|_0^\pi = 0.$$

så $f_1(x) = \sin x$ og $f_2(x) = \sin 2x$ er ortogonale.

Den ortogonale projeksjonen av $f(x) = x$ på W er gitt som

$$(Pf)(x) = \frac{\langle f(x), f_1(x)\rangle}{\langle f_1(x), f_1(x)\rangle} f_1(x) + \frac{\langle f(x), f_2(x)\rangle}{\langle f_2(x), f_2(x)\rangle} f_2(x)$$

Det gjenstår å beregne indreproduktene. Merk at $\sin^2 kx$ og $\cos^2 kx$ må ha samme integral mellom 0 og π siden begge er π-periodiske og kun faseforskjøvet i forhold til hverandre. Derfor er

$$\int_0^\pi \sin^2 kx\, dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin^2 kx + \cos^2 kx) = \frac{1}{2}\int_0^\pi dx = \frac{\pi}{2}$$

for alle heltallige k, og tilsvarende ved delvis integrasjon er

$$\langle f, f_k\rangle = \int_0^\pi x \sin kx\, dx = -x\frac{\cos kx}{k}\bigg|_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx\, dx = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{k}$$

Setter vi dette inn i uttrykket for $(Pf)(x)$ finner vi

$$(Pf)(x) = \frac{\pi}{\pi/2}\sin x + \frac{(-\pi/2)}{\pi/2}\sin 2x = 2\sin x - \sin 2x.$$

Oppgave 9

La $\mathcal{M}_n$ være vektorrommet av reelle $n \times n$-matriser. La $A \in \mathcal{M}_n$ være en gitt $n \times n$-matrise.

a) Vis at $L_A \colon \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ definert ved

$$L_A(B) = AB - BA$$

er en lineærtransformasjon.

b) Anta at A også er diagonaliserbar med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. A har tilhørende egenvektorer $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, og A^T har egenvektorer $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ slik at $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ og $A^T\mathbf{y}_i = \lambda_i \mathbf{y}_i$ for $i = 1, \ldots, n$. Vis at matrisa $\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j^T$ er en egenvektor til L_A med tilhørende egenverdi $\lambda_i - \lambda_j$ for alle $i = 1, \ldots, n$ og $j = 1, \ldots, n$.

Svar: **(a)** For å vise at L_A er en lineærtransformasjon kan man sjekke de to kriteriene

1. $B \in \mathcal{M}_n$ og $C \in \mathcal{M}_n$ impliserer at $L_A(B + C) = L_A(B) + L_A(C)$
2. $B \in \mathcal{M}_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ impliserer at $L_A(\alpha B) = \alpha L(B)$.

Vi har

$$L_A(B+C) = A(B+C) - (B+C)A = (AB - BA) + (AC - CA) = L_A(B) + L_A(C)$$

og

$$L_A(\alpha B) = A(\alpha B) - (\alpha B)A = \alpha AB - \alpha BA = \alpha(AB - BA) = \alpha L_A(B)$$

(b) Egenverdier og egenvektorer sjekkes ved direkte innsetting. Merk først at $A^T\mathbf{y}_j = \lambda_j\mathbf{y}_j$ impliserer ved transponering at $\mathbf{y}_j^T A = \lambda_j \mathbf{y}_j^T$ Vi har

$$L_A(\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j^T) = A\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j^T - \mathbf{x}_i\mathbf{y}_j^T A = \lambda_i\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j^T - \mathbf{x}_i\lambda_j\mathbf{y}_j^T = (\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j^T$$

noe som nettopp viser at $\lambda_i - \lambda_j$ er en egenverdi til L_A med tilhørende egenvektor $\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j^T$.