Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3 Prøveeksamen**

Faglig kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Eksamen består av 10 flervalgsoppgaver og 4 langsvarsoppgaver. På langsvarsoppgavene må du begrunne alle svar, og alle utregninger må vises.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Flervalgsoppgaver

Oppgave 1 La a, b, x og y være reelle tall, og la i være slik at $i^2 = -1$. Da vil produktet $(x + yi)(a + bi)$ være lik

- ☐ $xa + ybi$
- ☐ $xa - ybi$
- ☐ $xy + yb + (xb - ya)i$
- ☐ $xa - yb + (xb + ya)i$
- ☐ $xa + yb + (xb + ya)i$

Oppgave 2 For alle komplekse tall a har vi

$$\det \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix} =$$

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ a
- ☐ a^3
- ☐ a^9

Oppgave 3 La $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ være en lineærtransformasjon gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}.$$

Standardmatrisen til T er da gitt ved

- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 4 Dersom vektoren $\mathbf{b}$ er en av kolonnene i matrisen A, så vil ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

☐ alltid være løsbar
☐ aldri være løsbar
☐ være løsbar noen ganger, avhengig av A og $\mathbf{b}$
☐ være løsbar noen ganger, kun avhengig av A
☐ være løsbar noen ganger, kun avhengig av $\mathbf{b}$

Oppgave 5 Hvor mange underrom har $\mathbb{C}^2$?

☐ Nøyaktig to: $\{0\}$ og $\mathbb{C}^2$
☐ Nøyaktig to: $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$
☐ Nøyaktig tre: $\{0\} = \mathbb{C}^0, \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ og $\mathbb{C}^2$
☐ Nøyaktig fire: $\{0\}, \mathbb{C} \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{C}$ ('aksene') og $\mathbb{C}^2$
☐ Uendelig mange

Oppgave 6 For en lineært uavhengig mengde $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ med vektorer i et vektorrom V, så vil $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

☐ alltid være lineært avhengig
☐ aldri være lineært avhengig
☐ noen ganger være lineært avhengig, og andre ganger lineært uavhengig
☐ aldri være lineært uavhengig
☐ alltid være lineært uavhengig

Oppgave 7 La V og W være vektorrom slik at $\dim V = 5$ og $\dim W = 3$. La $T : V \to W$ være en surjektiv lineærtransformasjon. Hva kan vi da si om kjernen til T?

☐ $\dim\ker(T) \geq 2$
☐ $\dim\ker(T)$ kan være både $0, 1$ og 2
☐ $\dim\ker(T) = 2$
☐ $\dim\ker(T) = 1$
☐ $\dim\ker(T) = 0$

Oppgave 8 La A være en $m \times n$-matrise og la B være en $n \times m$-matrise, slik at $AB = I_m$ ($m \times m$-identitetsmatrisen). La $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være gitt ved $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ og la $f_B \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ være gitt ved $f_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$. Hvilken av følgende påstander er sann?

☐ $m \geq n$, f_A er injektiv, f_B er surjektiv
☐ $m \leq n$, f_A er surjektiv, f_B er injektiv
☐ $m = n$, f_A og f_B er inverterbare (bijeksjoner)
☐ $m \leq n$, f_A er injektiv, f_B er surjektiv
☐ $m \geq n$, f_A er surjektiv, f_B er injektiv

Oppgave 9 Hvilken av følgende påstander er riktig? For en $n \times n$-matrise A har vi

☐ $\det(A) = 0$ medfører at $\operatorname{rank}(A) = 0$
☐ $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\operatorname{rank}(A) \leq 1$
☐ $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\operatorname{rank}(A) \leq n - 1$
☐ $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\operatorname{rank}(A) \geq n - 1$
☐ $\det(A) = 0$ medfører at $\operatorname{rank}(A) = n$

Oppgave 10 La A være en $n \times n$-matrise og la $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha to lineært uavhenige løsninger. Hvilken av de følgende påstandene er riktig?

☐ $\operatorname{rank}(A) = 2$
☐ $\operatorname{rank}(A) \geq 2$, og tilfellet $\operatorname{rank}(A) > 2$ kan forekomme
☐ $\operatorname{rank}(A) \leq n$, og tilfellet $\operatorname{rank}(A) = n$ kan forekomme
☐ $\operatorname{rank}(A) \leq n - 1$ og tilfellet $\operatorname{rank}(A) = n - 1$ kan forekomme
☐ $\operatorname{rank}(A) \leq n - 2$ og tilfellet $\operatorname{rank}(A) = n - 2$ kan forekomme

Langsvarsoppgaver

Oppgave 11 I denne oppgaven skal du finne eksempler på matriser, vektorer eller funksjoner med visse egenskaper. Når du gir et eksempel, må du også forklare hvorfor dette er et gyldig eksempel.

a) Gi et eksempel på en matrise A, slik at

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

b) Gi et eksempel på to 2×2–matriser A og B slik at A og B er diagonaliserbare, men $A + B$ ikke er diagonaliserbar.

c) Gi et eksempel på et polynom $p(x)$ slik at $p(x) = 2^x$ for $x = 0, 1, 2, 3$.

d) Gi et eksempel på fire vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ i $\mathbb{R}^3$, slik at enhver mengde bestående av tre av disse vektorene danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

e) La p og q være komplekse tall. Gi et eksempel på en matrise på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & ? \\ 1 & ? \end{bmatrix}$$

som har karakteristisk polynom $\lambda^2 + p\lambda + q$.

Oppgave 12 Så lenge noen kan huske har det vært reiserestriksjoner i Matteland, og det betyr at innbyggerne bare har to destinasjoner de kan reise til på påskeferie: Gaussedal, eller RadRom Resort. Man kan også holde seg hjemme. Påskeferieforsker Otto Gonal har notert seg følgende trend:

- Hvis man har vært hjemme et år, så er det null prosent sannsynlighet for at man blir hjemme året etter, 1/4 sannsynlighet for at man reiser til Gaussedal og 3/4 sannsynlighet for at man reiser til RadRom Resort.
- Hvis man har tilbrakt påsken i Gaussedal, er det like stor sjanse for at man besøker Gaussedal igjen neste år, som at man blir hjemme, men av én eller annen grunn er det ingen som drar til RadRom Resort året etter at de har vært i Gaussedal.

- Har man vært på RadRom Resort, så er det like stor sjanse både for at man blir hjemme året etter, kommer tilbake til RadRom Resort eller drar til Gaussedal.

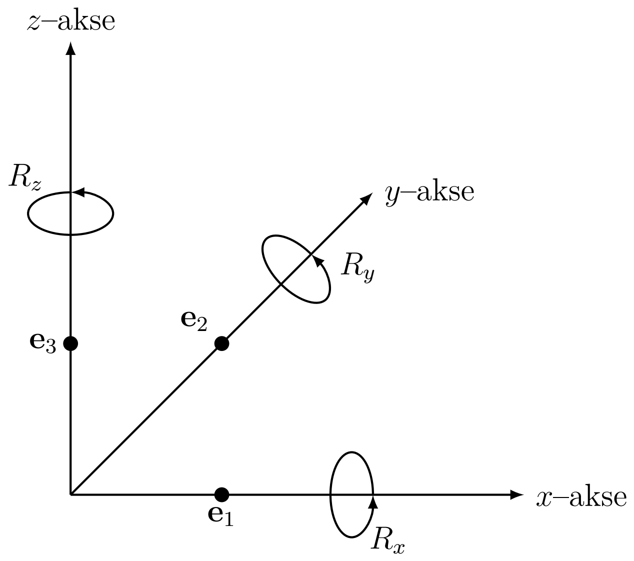
a) Finn den stokastiske matrisen M som representerer hvordan innbyggerne endrer påskeferieplaner fra år til år.

b) Er M regulær? Husk å begrunne svaret ditt.

c) Gitt at en innbygger i Matteland har vært hjemme et år, hva er sannsynligheten for at hun drar til RadRom Resort to år etterpå?

d) Otto Gonal ser ikke for seg at reiserestriksjonene letter med det første. Hvordan vil innbyggerne i Matteland fordele seg på de ulike feriestedene i det lange løp? Hvilken destinasjon blir den mest populære?

Oppgave 13 La $\mathbf{e}_1$ være den første standardbasisvektoren i $\mathbb{R}^3$. La R_x, R_y og R_z være lineærtransformasjonene som roterer vektorer med en vinkel $\pi/2$ om henholdsvis x-aksen, y-aksen og z-aksen i $\mathbb{R}^3$ (bruk høyrehånds-regelen).



a) Hva er de tre vinklene i trekanten med hjørner i $\mathbf{e}_1$, $R_y(\mathbf{e}_1)$ og $R_z(\mathbf{e}_1)$?

b) Hva er avstanden mellom $R_y(\mathbf{e}_1)$ og midtpunktet på linjestykket mellom $\mathbf{e}_1$ og $R_z(\mathbf{e}_1)$?

c) Finn egenverdiene og egenrommene til sammensetningen $R_x R_y R_z$.

d) La T være lineærtransformasjonen med standardmatrise

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kan du skrive T som en sammensetning $S_1 \circ \cdots \circ S_n$, der hver transformasjon S_i er én av R_x, R_y eller R_z?

Oppgave 14 La $\mathcal{P}$ være vektorrommet bestående av polynomer med reelle koeffisienter. La $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

a) Vis at $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er et indreprodukt på $\mathcal{P}$.

b) Finn projeksjonen av polynomet $p(x) = x^3$ ned på underrommet av $\mathcal{P}$ bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 1.

c) La $\mathcal{P}_2$ være underrommet av $\mathcal{P}$ bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 2. Finn et reelt tall t slik at basisen $\mathcal{B} = (1, x, x^2 - t)$ er ortogonal med hensyn til indreproduktet beskrevet over (du trenger ikke vise at $\mathcal{B}$ er en basis for alle reelle tall t).