1

Eksamensoppgave 1

Løs ligningssystemet:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 4 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

Svar: x = ___, y = ___, z = ___.

Maks poeng: 1

2

Eksamensoppgave 2

Anta at redusert trappeform av totalmatrisen (den utvidede matrisen) til et ligningssystem har formen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Hvor mange løsninger har systemet?

Velg ett alternativ:

- Uendelig mange.
- Ingen.
- Nøyaktig en.
- Det avhenger av verdien til a.

Maks poeng: 1

3 Eksamensoppgave 3

For hvilken vektor $\vec{b}$ har systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ en løsning når

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} ?$$

Velg ett alternativ:

- $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Maks poeng: 1

4

Eksamensoppgave 4 og 5

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & -2 \end{bmatrix}$, hvor $a \in \mathbb{C}$.

4) Hva er $\det A$?

Velg ett alternativ:

- $-4 - 2a$
- $-4 - 2a^2$
- -4
- $-4 + a^2$

5) For hvilke verdier av $a \in \mathbb{C}$ er A ikke inverterbar?

Velg ett alternativ:

- $a = \pm\sqrt{2}$
- Ingen
- $a = \pm\sqrt{2}i$
- $2i \text{ og } i$

Maks poeng: 2

5

Eksamensoppgave 6

La P være et parallellogram med hjørner i $(1, 2), (3, 1), (-1, -2) \text{ og } (-3, -1)$.

Hva er arealet av parallellogrammet? Arealet er: ___ .

Maks poeng: 1

6 Eksamensoppgave 7 til 10

La $A\vec{x} = \vec{b}$ være et ligningssystem, der A er en $m \times n$ -matrise over $\mathbb{R}$. Er følgende sant eller usant?

7) Dersom systemet har minst to løsninger, så har det uendelig mange løsninger.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

8) Dersom $m = n$, så er det alltid nøyaktig en løsning.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

9) Dersom A har to like rader, så har systemet ingen løsning.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

10) Dersom $m > n$, så finnes alltid minst en løsning.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

Maks poeng: 4

7 Eksamensoppgave 11 og 12

La $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

11) Hva er egenverdiene til A?

Velg ett alternativ:

- 2 og 1 og 0
- 2 og 1
- 2 og $\frac{1}{2}$
- 1
- 2

12) Hvilken av følgende matriser P gjør at $P^{-1}AP$ er en diagonalmatrise?

Velg ett alternativ:

- $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Maks poeng: 2

8

Eksamensoppgave 13

La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen som speiler en vektor om x-aksen. Hva er egenverdiene til T ?

Velg ett alternativ:

- T har ingen egenverdier
- 1 og 0
- ± 1
- 1 og 0 og -1
- $\pm i$

Maks poeng: 1

9

Eksamensoppgave 14

La $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Hvilken av de følgende er sann?

Velg ett alternativ:

- A er diagonaliserbar for alle verdier av a og b
- A er diagonaliserbar for alle verdier av a og $b \neq 0$
- A er ikke diagonaliserbar for noen verdier av a og b
- A er diagonaliserbar for alle verdier av a og $b = 0$

Maks poeng: 1

10 Eksamensoppgave 15

Anta at A er en invertibel matrise med egenverdi $\lambda = 3$. Hvilken av følgende er sann?

Velg ett alternativ:

- A^{-1} har egenverdi $\frac{1}{3}$
- A^{-1} har egenverdi -3
- A^{-1} har egenverdi 3
- Vi kan ikke si noe om egenverdiene til A^{-1}

Maks poeng: 1

11 Eksamensoppgave 16 til 20

La A være en reell 3×3 -matrise og la B være en kompleks 3×3 -matrise. Er følgende sant eller usant for alle slike matriser A og B ?

16) A har ingen komplekse egenverdier.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

17) B har minst en reell egenverdi.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

18) B er diagonaliserbar.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

19) A har minst en reell egenverdi.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

20) Dersom A er symmetrisk, har den kun reelle egenverdier.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

Maks poeng: 5

12 Eksamensoppgave 21 til 23

Er følgende delmengder vektorrom?

21) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

22) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x| = |y| \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

23) $\{\, p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \;|\; p'(x) = 0 \,\} \subseteq \mathcal{P}_2$

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

Maks poeng: 3

13

Eksamensoppgave 24 til 26

La A være en 3×3 -matrise og la I_3 være 3×3 -identitetsmatrisen. Er følgende funksjoner en lineærtransformasjon?

24) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(\vec{x}) = A\vec{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

25) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(\vec{x}) = (A^2 + I_3)\vec{x}$.

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

26) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, \quad T(p(x)) = 2p'(x) + p(x) + 1$

Velg ett alternativ:

- Ja
- Nei

Maks poeng: 3

14 Eksamensoppgave 27 til 30

La V være et vektorrom med $\dim V = n \geq 2$. Er følgende påstander sanne eller usanne?

27) Alle mengder av $n-1$ vektorer i V er lineært uavhengige.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

28) Alle mengder av $n+1$ vektorer i V er lineært avhengige.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

29) Det finnes ingen injektiv lineærtransformasjon $T : V \to V$ slik at $T^2 = 0$.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

30) En lineærtransformasjon $T : V \to V$ som oppfyller $T^2 = T$ må være injektiv.

Velg ett alternativ:

- Sant
- Usant

Maks poeng: 4

15

Eksamensoppgave 31 og 32

Ta utgangspunkt i datasettet som består av punktene $(-1,-1)$, $(0,0)$ og $(1,2)$ i $\mathbb{R}^2$.

31) Hvilken linje passer best til punktene?

Velg ett alternativ:

- $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$
- $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
- $y = 2x + 3$
- $y = 3x + 2$

32) Hvilket polynom av grad 2 går gjennom alle punktene?

Velg ett alternativ:

- $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$
- $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$
- $y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
- $y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

Maks poeng: 2

16
Eksamensoppgave 33 til 35

La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være gitt ved $T(p(x)) = p'(x) + p''(x)$. La $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ være en basis for $\mathcal{P}_2$.

33) Hva er $[T]_{\mathcal{B}}$?

Velg ett alternativ:

- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

34) Hva er dim Null T? Svar: ____.

35) Hvilket alternativ er sant?

Velg ett alternativ:

- T har ingen egenverdier
- 0, 1 og 2 er egenverdier for T
- 0 er eneste egenverdi for T
- 1 og 2 er egenverdier for T

Maks poeng: 3

17
Eksamensoppgave 36

En løsning av $y'' - 4y' + 4y = 0$ tilfredsstiller $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Hva er $y(1)$? Svar: ____. (Oppgi svaret med tre desimaler.)

Maks poeng: 1

18 Eksamensoppgave 37

La $\vec{y}$ være en løsning av ligningen $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \vec{y}$. Hva er $\lim_{t \to \infty} \vec{y}(t)$?

Velg ett alternativ:

- $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Maks poeng: 1

19 Eksamensoppgave 38

La $z = a + bi$ være et komplekst tall. Da finnes det ikke en w slik at $zw = 1$ dersom:

Velg ett alternativ:

- $b = 0$
- $a = 0 \text{ og } b = 0$
- $a = 0$
- $z \neq 0$

Maks poeng: 1

20 Eksamensoppgave 39

Å gange et komplekst tall med $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$ er en rotasjon med hvor mange radianer?

Svar: ____ radianer. (Oppgi svaret med tre desimaler.)

Maks poeng: 1

21 Eksamensoppgave 40

Femteamanuensis Moreon Bulde må jobbe hjemme hele våren. Han kjeder seg, men liker å holde på med tall. Dessuten er han veldig glad i egg, og starter hver dag med enten bløtkokt, speilegg eller sjokoladeegg. Dagen etter sjokoladeegg blir det like ofte speilegg som bløtkokt, men ALDRI sjokoladeegg to dager på rad. Dagen etter enten speilegg eller bløtkokt blir det akkurat det samme med 50% sannsynlighet, og ellers blir det sjokoladeegg. Hvordan blir det i det lange løp?

Velg ett alternativ:

- Det blir oftest sjokoladeegg
- Det blir bare eggerøre hver dag
- Det blir oftest speilegg
- Det blir like ofte alle tre alternativene

Maks poeng: 1