i

Eksamensforside TMA4110 og TMA4115 Kont 2020

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i TMA4110/TMA4115 Matematikk 3

Eksamensdato: 17.08.2020

Eksamenstid (frå-til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: A / Alle hjelpemiddel tillatne

Fagleg kontakt under eksamen: Aslak Bakke Buan[a], Morten Solberg[b]
Tlf.: [a]mobil Aslak, [b]mobil Morten

Teknisk hjelp under eksamen: NTNU Orakel
Tlf: 73 59 16 00

ANNAN INFORMASJON:
Fagleg kontaktperson skal berre kontaktast dersom det er direkte feil eller manglar i oppgåvesettet.

Lagring: Svara dine i Inspera Assessment vert lagra automatisk. Jobbar du i andre program – hugs å lagre undervegs.

Juks/plagiat: Eksamen skal vere eit individuelt, sjølvstendig arbeid. Det er tillate å bruke hjelpemiddel.

Varslingar: Dersom det oppstår behov for å gje beskjedar til kandidatane medan eksamen er i gang (f.eks. ved feil i oppgåvesettet), vil dette bli gjort via varslingar i Inspera. Eit varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen i Inspera. Du kan finne att varselet ved å klikke på bjølla i øvre høgre hjørne på skjermen. Det vil i tillegg bli sendt SMS til alle kandidatar for å sikre at ingen går glipp av viktig informasjon. Ha mobiltelefonen din innan rekkevidde.

Vekting av oppgåvene: Eksamen består av 40 oppgåver. Alle oppgåver vert vekta likt. Kandidatane må svara korrekt på minst 16 oppgåver for å stå.

OM LEVERING:

Svara dine vert levert automatisk når eksamenstida er ute og prøven stenger, under føresetnad av at du har svart på minst ei oppgåve. Dette skjer sjølv om du ikkje har klikka «Lever og gå tilbake til Dashboard» på siste side i oppgåvesettet. Du kan opne og redigere svara dine så lenge prøven er open. Dersom du ikkje har svart på nokon av oppgåvene ved prøveslutt, blir ingenting levert.

Trekk frå eksamen: Ønskjer du å levere blankt/trekke deg, gå til hamburgermenyen i øvre høgre hjørne og vel «Lever blankt». Dette kan ikkje angrast sjølv om prøven framleis er open.

Tilgang til svara dine: Du finn svara dine i Arkiv etter at sluttida for eksamen er passert.

1

Oppgave 1

Løys likningssystemet:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 2 \\ 2x - y + 4z &= 12 \\ 2x + y + z &= 7 \end{aligned}$$

Svar: x = ___ , y = ___ , z = ___ .

Maks poeng: 1

2

Oppgave 2

Anta at redusert trappeform av totalmatrisa (den utvida matrisa) til eit likningssystem har forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Kor mange løysingar har systemet?

Vel eitt alternativ:

- Uendeleg mange.
- Ingen.
- Nøyaktig ei.
- Det kjem an på verdien til a.

Maks poeng: 1

3

Oppgave 3

Anta at totalmatrisa (den utvida matrisa) til eit likningssystem er:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]?$$

Kor mange løysingar har systemet?

Vel eitt alternativ:

- Nøyaktig ei
- Ingen
- Uendeleg mange
- Nøyaktig tre

Maks poeng: 1

4

Oppgave 4, 5

4) La $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Kva for ein vektor $\vec{z}$gjer at mengda $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ er lineært uavhengig?

Vel eitt alternativ

- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

5) La $\vec{x} = \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}$ og $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Kva for ein vektor $\vec{z}$gjer at mengda $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$er ein basis for $\mathbb{C}$?

Vel eitt alternativ

- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Maks poeng: 2

5

Oppgave 6

6) Kva for ein av følgjande påstandar er korrekt for alle $n \times n$-matriser A og B?

Vel eitt alternativ

- Dersom det eksisterer $n \times n-$ matrise C slik at $CA = CB$ så er $A = B$
- Dersom $A^2 = B^2$, så er $A = \pm B$
- $AB = BA$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Maks poeng: 1

6

Oppgave 7, 8, 9, 10

La $A\vec{x} = \vec{b}$ være eit likningssystem, kor A er ei $n \times n$ -matrise over $\mathbb{R}$, der $n > 2$. Er følgjande sant eller usant?

7) Systemet har alltid minst ei løysing.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

8) Viss to kolonnar i A er like, så har systemet ingen løysing.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

9) Viss to kolonnar i A er like, så har systemet uendeleg mange løysingar.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

10) Viss alle kolonnane i A er forskjellige, så har systemet minst ei løysing.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

Maks poeng: 4

7

Oppgave 11, 12

La $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11) Kva er eigenverdiane til A?

Vel eitt alternativ

- $1 \text{ og } 4$
- $0 \text{ og } 1$
- $0 \text{ og } 1 \text{ og } 4$
- $1 \text{ og } 2 \text{ og } -2$

12) Kva for ei av følgjande matriser P førar til at $P^{-1}AP$ er ei diagonalmatrise?

Vel eitt alternativ

- $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Maks poeng: 2

8

Oppgave 13

La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen som speglar ein vektor om yz-planet. Kva er eigenverdiane til T ?

Vel eitt alternativ

- T har ingen eigenverdiar
- ± 1
- $\pm i$
- 1 og 0
- 1 og 0 og -1

Maks poeng: 1

9

Oppgave 14

La $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$, kor $a, b \in \mathbb{R}$. Kva for ein av dei følgjande er sann?

Vel eitt alternativ

- A er ikkje diagonaliserbar for nokre verdiar av a og b
- A er diagonaliserbar for alle verdiar av a og $b = 0$
- A er diagonaliserbar for alle verdiar av a og $b \neq 0$
- A er diagonaliserbar for alle verdiar av a og b

Maks poeng: 1

10

Oppgave 15

Anta at A og B er 2×2-matriser som begge har eigenverdi $\lambda = 3$. Kva for av følgjande er sann?

Vel eitt alternativ

- Me kan ikkje seie noko om eigenverdiane til AB
- AB har eigenverdi 6
- AB har eigenverdi 9
- AB har eigenverdi 3

Maks poeng: 1

11 Oppgave 16, 17, 18, 19, 20

16) Det eksisterer ikkje matriser med eigenverdi 0.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

17) Det eksisterer ikkje 3×3-matriser med 4 forskjellige eigenverdiar.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

18) La A vere ei 3×3-matrise, og la $\vec{x}, \vec{y}$ være vektorar i $\mathbb{R}^3$. Viss $A\vec{x} = 3\vec{x}$ og $A\vec{y} = 2\vec{y}$, så må $\vec{x}$ og $\vec{y}$ være lineært uavhengige.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

19) La A være ei reell 3×3-matrise. Viss det eksisterer ein basis for $\mathbb{R}^3$ som består av eigenvektorar for A, så har A tre forskjellige eigenverdiar.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

20) La A vere ei reell 3×3-matrise. Viss det eksisterer ein vektor $\vec{x}$ i $\mathbb{C}^3$, slik at $A\vec{x} = (1+i)\vec{x}$, så må det eksistere ein vektor $\vec{y}$ slik at $A\vec{y} = (1-i)\vec{y}$.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

Maks poeng: 5

12

Oppgave 21, 22, 23

Er følgjande delmengder vektorrom?

21) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \neq y \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Vel eitt alternativ

- Ja
- Nei

22) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = yz \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Vel eitt alternativ

- Ja
- Nei

23) $\left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \;\middle|\; p(1) = 0 \right\} \subseteq \mathcal{P}_2$

Vel eitt alternativ

- Ja
- Nei

Maks poeng: 3

13

Oppgave 24, 25, 26, 27

Er følgjande funksjonar ein lineærtransformasjon?

24) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix}.$

Vel eitt alternativ

- Ja
- Nei

25) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x(y+1) \end{bmatrix}.$

Vel eitt alternativ

- Ja
- Nei

26) $T:\mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3, \quad T(p(x)) = xp'(x)$

Vel eitt alternativ

- Ja
- Nei

27) $T{:}\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gjeve ved $T(\vec{w}) = (\vec{v}\cdot\vec{w})\,\vec{v}$, hvor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vel eitt alternativ

- Ja
- Nei

Maks poeng: 4

14

Oppgave 28, 29, 30

Er følgjande påstandar sanne eller usanne?

28) Alle endelegdimensjonale vektorrom har ein basis.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

29) Alle injektive lineærtransformasjonar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har ein invers.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

30) La $\mathcal{P}_2 = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
Alle injektive lineærtransformasjonar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ har ein invers.

Vel eitt alternativ

- Sant
- Usant

Maks poeng: 3

15

Oppgave 31, 32

Ta utgangspunkt i datasettet som består av punkta $(-1, 0)$, $(0, 1)$ og $(2, 2)$ i $\mathbb{R}^2$.

31) Kva linje passar best til punkta?

Vel eitt alternativ

- $y = x + 1$
- $y = \frac{9}{14}x + \frac{11}{14}$
- $9x + \frac{11}{14}$
- $y = \frac{11}{14}x + \frac{9}{14}$

32) Kva polynom av grad 2 går gjennom alle punkta?

Vel eitt alternativ

- $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - 1$
- $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 1$
- $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 1$
- $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1$

Maks poeng: 2

16

Oppgave 33, 34

La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være gitt ved $T(p(x)) = x^2 p''(x)$. La $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ være ein basis for $\mathcal{P}_2$.

33) Kva er $[T]_{\mathcal{B}}$?

Vel eitt alternativ

- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

34) Kva for eit alternativ er sant?

Vel eitt alternativ

- 0 og 2 er eigenverdiar for T
- 0, 1 og 2 er eigenverdiar for T
- T har ikkje nokre eigenverdiar
- 0 er einaste eigenverdi for T

Maks poeng: 2

17

Oppgave 35

35) Kva for ei av matrisene er ei regulær stokastisk matrise?

Vel eitt alternativ

- $\begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}$

Maks poeng: 1

18

Oppgave 36

Ei løysing av $y'' - 3y' + 2y = 0$ oppfyller $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$. Kva er $y(1)$?

Svar: ____ . (Oppgje svaret med tre desimalar.)

Maks poeng: 1

19

Oppgave 37

37) La $\vec{y}$ være ei løysing av settet av differensiallikningar gitt ved $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \vec{y}$, der $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

Kva for ein funksjon kan **ikkje** vere lik verken y_1, y_2 eller y_3?

Vel eitt alternativ

- e^{5x}
- e^{3x}
- e^{x}
- e^{2x}

Maks poeng: 1

20

Oppgave 38

38) Kva er polarform av løysingane av likninga $z^2 + z + 1 = 0$?

Vel eitt alternativ

- $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ og $e^{\frac{4\pi}{3}i}$
- $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ og $-e^{\frac{2\pi}{3}i}$
- $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ og $2e^{\frac{4\pi}{3}i}$
- $2e^{\frac{\pi}{3}i}$ og $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

Maks poeng: 1

21

Oppgave 39

39) Kor mange løysingar i $\mathbb{C}$ har likninga $z^2 + i\,\overline{z} = 0$?

Vel eitt alternativ

- Nøyaktig fire løysingar
- Nøyaktig to løysingar
- Nøyaktig ei løysing
- Ingen løysingar

Maks poeng: 1

22

Oppgave 40

40) Sommaren har vore særs god for statsstipendiat Skyberg. Kvar dag har han meiska seg med dei lekraste italienske iskremanretningar. Dagen etter ein affogato, vart det affogato igjen halvparten av gongane, og elles like ofte stracciatella som semifreddo. Etter stracciatella vart det aldri affogato, og elles like ofte stracciatella som semifreddo. Etter semifreddo valde han like ofte alle tre variantane. Korleis vart det i det lange løp?

Vel eitt alternativ

- Det vart like ofte alle tre alternativa
- Det vart like ofte stracciatella og semifreddo, men litt mindre av affogato
- Det vart oftast semifreddo
- Det vart oftast stracciatella

Maks poeng: 1