Oppgave 1 • Elementære radoperasjoner gir at

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nullrommet er løsningsmengden til $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, som da kan uttrykkes som

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3s - 2t \\ s \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} t, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

En basis for $\operatorname{Null} A$ er dermed $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Videre leser vi av at det er pivotelementer i kolonnene 1 og 3 i den radreduserte versjonen av A, slik at en basis for $\operatorname{Col} A$ er

$$\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

• Siden $\dim \operatorname{Null}(A^\top) + \operatorname{rank} A = \#\text{rader i } A = 3$, konkluderer vi med $\dim \operatorname{Null}(A^\top) = 1$, siden $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = 2$.

Oppgave 2 Vi etablerer først generell løsning på systemet $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, hvor $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Egenverdiene til A finner vi ved å løse karakteristisk ligning

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5,$$

som har løsninger -1 og 5. Fra

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

leser vi av at $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor tilhørende egenverdien -1. Tilsvarende finner vi at $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en egenvektor assosiert med egenverdien 5. Generell løsning på systemet er da

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{5t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Spesifikk løsning må tilfredsstille

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

som gir at $c_1 = -1$ og $c_2 = 2$, dvs. løsningen blir

$$x_1(t) = 2\mathrm{e}^{5t} - \mathrm{e}^{-t}, \qquad x_2(t) = 4\mathrm{e}^{5t} + \mathrm{e}^{-t}.$$

Oppgave 3 Én løsning er $z = 1$ ved inspeksjon, og dermed har vi at

$$z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = (z-1)(z^2 - 2z + 4),$$

f.eks. ved polynomdivisjon. De resterende to løsningene finner vi fra $z^2 - 2z + 4 = 0$, som ved andregradsformelen blir $z = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$, dvs.

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad \text{og} \qquad z_3 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

på kartesisk form. Lengden til z_2 blir $\sqrt{1^2 + 3} = 2$ og argumentet/vinkelen er $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$, slik at polar form blir

$$z_1 = 1\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}, \qquad z_2 = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} \qquad \text{og} \qquad z_3 = \overline{z_2} = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} = 2\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

Oppgave 4 • Vi bruker regneregler for determinanter og finner at

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -30.$$

Andre utregningsvarianter er også mulige.

• Siden $\det A \neq 0$, er A inverterbar. Dermed har ethvert ligningssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nøyaktig én løsning ($\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$). (Løsningen er for øvrig $\boldsymbol{x} = (0, 1, 2, -1)$ for gitt $\boldsymbol{b}$.)

Oppgave 5 • Det enkleste er kanskje å bruke den ordnede basisen $(1, t, t^2)$ til $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, hvorpå p har koordinater $(2, -1, 0)$, q har koordinater $(1, 0, 1)$ og r har koordinater $(1, 2, -3)$. Spørsmålet om p, q og r er lineært uavhengige i $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, blir da ekvivalent med spørsmålet om vektorene

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige i $\mathbb{R}^3$. Dette inntreffer f.eks. presis når matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(med koordinatvektorene som kolonner) har full rang. Ved elementære radoperasjoner finner man at $A \sim I$, slik at matrisen har full rang, og dermed er polynomene lineært uavhengige i $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

En alternativ formulering av problemstillingen er å sette opp lineærkombinasjonen

$$c_1 p(t) + c_2 q(t) + c_3 r(t) = 0$$

og vise at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Siden lineærkombinasjonen skal gjelde for alle t, vil man kunne kreve tre ligninger: én for t^2, én for t og én for konstantledd. Implisitt bruker man også her standardbasisen $(1, t, t^2)$ til $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, hvilket resulterer i et ligningssystem med samme matrise A som ovenfor (evt. med omrokkerte rader).

• Siden

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{2} p(k)q(k) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 = 4$$

ikke er lik 0, står p og q ikke ortogonalt på hverandre.

Oppgave 6 Karakteristisk ligning $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ tilhørende homogen ligning

$$y'' + y' - 6y = 0$$

har løsningene $\lambda = -3$ og $\lambda = 2$, slik at løsningen på homogen ligning tar formen

$$y_{\mathrm{h}}(t) = c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 \mathrm{e}^{2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Vi bruker ubestemte koeffisienters metode for å bestemme partikulærløsningen. Siden leddet e^{2t} i høyresiden av ligningen også opptrer i y_{h}, blir gjetningen på formen

$$y_{\mathrm{p}}(t) = At\mathrm{e}^{2t} + Bt + C.$$

Ved innsetting av y_p i differensialligningen,

$$4A(t+1)\mathrm{e}^{2t} + \Big(A(2t+1)\mathrm{e}^{2t} + B\Big) - 6\left(At\mathrm{e}^{2t} + Bt + C\right) = 5\mathrm{e}^{2t} - 36t,$$

ender vi opp med kravene

$$\mathrm{e}^{2t}\colon 5A = 5, \qquad t\colon\ -6B = -36, \qquad \text{konstantledd: } B - 6C = 0,$$

som har løsningene $A = 1$, $B = 6$ og $C = 1$. Altså er generell løsning lik

$$y(t) = y_\mathrm{h}(t) + y_\mathrm{p}(t) = c_1\mathrm{e}^{-3t} + (t + c_2)\mathrm{e}^{2t} + 6t + 1, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Oppgave 7 • Siden $\operatorname{Col} A$ har ortogonal basis $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, får vi at projeksjonen blir

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{b}} = P_{\operatorname{Col} A}(\boldsymbol{b}) &= \frac{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}_1\rangle}{\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1\rangle}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}_2\rangle}{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2\rangle}\boldsymbol{u}_2 + \frac{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}_3\rangle}{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_3\rangle}\boldsymbol{u}_3 \\ &= \frac{0}{4}\boldsymbol{u}_1 + \frac{-2}{4}\boldsymbol{u}_2 + \frac{0}{4}\boldsymbol{u}_3 \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

• Minste-kvadratsløsningen til det overbestemte systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ er løsningen $\widehat{\boldsymbol{x}}$ på systemet $A\boldsymbol{x} = \widehat{\boldsymbol{b}}$, siden $\widehat{\boldsymbol{b}}$ er vektoren i $\operatorname{Col} A$ som minimerer avstanden til $\boldsymbol{b}$. Gausseliminasjon gir at

$$\big[A \mid \widehat{\boldsymbol{b}}\big] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 & 1/2 \\ 1 & 3 & 3 & -1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

så $\widehat{\boldsymbol{x}} = \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)$. Alternativt kan man løse normalligningene $A^\top A\boldsymbol{x} = A^\top\boldsymbol{b}$ direkte, men det blir mer arbeidsomt.

Oppgave 8 • Vektoren blir lik $1\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ i standardbasisen.

• La $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ være en vektor. Basisbyttematrisen M fra $\mathscr{C}$ til $\mathscr{B}$ sender koordinatene $[\boldsymbol{x}]_\mathscr{C}$ i basis $\mathscr{C}$ til koordinatene $[\boldsymbol{x}]_\mathscr{B}$ i basis $\mathscr{B}$, det vil si:

$$[\boldsymbol{x}]_\mathscr{B} = M[\boldsymbol{x}]_\mathscr{C}.$$

Kolonnene i M blir da $\mathscr{B}$-koordinatene til basisvektorene i $\mathscr{C}$,

$$M = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{c}_1]_{\mathscr{B}} & [\boldsymbol{c}_2]_{\mathscr{B}} \end{bmatrix},$$

og vi finner M enklest ved å utføre gausseliminasjonen $\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \mid \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I \mid M \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \mid \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rr|rr} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right].$$

Konklusjonen er at $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Oppgave 9 La 0_V betegne nullvektoren i V og 0_W være nullvektoren i W. Da er $0_W \in T(U)$ siden $0_V \in U$ (fordi U er et underrom i V) og $T(0_V) = 0_W$ (fordi T er en lineærtransformasjon).

Anta så at $w_1, w_2 \in T(U)$ og at c er en skalar. Vi må vise at

$$c\,w_1 + w_2 \in T(U).$$

Per definisjon finnes det $u_1, u_2 \in U$ slik at $w_1 = T(u_1)$ og $w_2 = T(u_2)$. Siden U er et underrom, vet vi at $c\,u_1 + u_2 \in U$. Dermed er $T(c\,u_1 + u_2) \in T(U)$ per definisjon av $T(U)$. Men nå gjenkjenner vi at

$$T(c\,u_1 + u_2) = c\,T(u_1) + T(u_2) = c\,w_1 + w_2$$

fordi T er en lineærtransformasjon. Altså er $c\,w_1 + w_2 \in T(U)$, hvilket var det vi skulle vise.

Oppgave 10 Vi skal finne en matrise C slik at $C(I - A) = I$ og må benytte oss av at $A^3 = 0$. La oss multiplisere $I - A$ med A^k for $k = 0, 1, 2$:

$$I(I - A) = I - A;$$

$$A(I - A) = A - A^2;$$

$$A^2(I - A) = A^2 - A^3.$$

Hvis vi summerer alle ligningene, får vi da at

$$(I + A + A^2)(I - A) = (I - A) + (A - A^2) + (A^2 - A^3) = I - A^3 = I.$$

Med andre ord er inversen lik $I + A + A^2$.

Alternativt: $C(I - A) = I$ impliserer at $C = I + CA$, slik at $C = I + (I + CA)A$ og dermed $C = I + (I + (I + CA)A)A = I + A + A^2 + CA^3 = I + A + A^2$.

(Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$, med $A^2 = \begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$ og $A^3 = \begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$, hvor $\begin{bmatrix} 1&-1&0 \\ 0&1&-1 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}^{-1} = (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$.)

(For interesserte: Dette er faktisk et spesialtilfelle av matrisevarianten for geometriske rekker:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \cdots = (I - A)^{-1} = \text{“}\ \frac{I}{I - A}\ \text{”}$$

hvis $\|A\| < 1$, hvor $\|A\|$ er “størrelsen” på A—mer spesifikt: Frobenius-normen.)