Oppgave 1 • Regn ut en basis for kolonnerommet og nullrommet til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -15 & -1 & 12 \\ -2 & 6 & 0 & -4 \\ 4 & -12 & -2 & 12 \end{bmatrix}.$$

• Bestem også $\dim \mathrm{Null}(A^\top)$.

Oppgave 2 Finn løsningen av systemet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 4x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

som oppfyller betingelsene $x_1(0) = 1$ og $x_2(0) = 5$.

Oppgave 3 Bestem alle de komplekse løsningene til ligningen

$$z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0.$$

Skriv løsningene på polar form. *Hint: Klarer du å se én løsning direkte?*

Oppgave 4 • Beregn determinanten til

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

• Hvor mange løsninger har ligningssystemet

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} ?$$

(Begrunn svaret.)

Oppgave 5 • Avgjør om polynomene

$$p(t) = 2 - t, \qquad q(t) = 1 + t^2 \qquad \text{og} \qquad r(t) = 1 + 2t - 3t^2$$

er lineært uavhengige eller ikke i $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, vektorrommet av reelle andregradspolynomer.

• Finn så ut om p og q står ortogonalt på hverandre med hensyn på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{2} f(k)g(k), \qquad f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Oppgave 6 Bestem generell løsning til differensialligningen

$$y'' + y' - 6y = 5e^{2t} - 36t.$$

Oppgave 7 En ortogonal basis for kolonnerommet til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

er gitt ved $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, hvor

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Regn ut projeksjonen av $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ned på $\operatorname{Col} A$. (Svaret skal bli $\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.)
- Finn minste-kvadratsløsningen til det overbestemte ligningssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Oppgave 8 To ulike ordnede basiser for $\mathbb{R}^2$ er $\mathscr{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ og $\mathscr{C} = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$, hvor

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- En vektor har koordinater $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ med hensyn på basis $\mathscr{B}$. Hva er koordinatene til denne vektoren i standardbasisen?
- Bestem basisbyttematrisen fra $\mathscr{C}$ til $\mathscr{B}$.

Oppgave 9 La $T\colon V \to W$ være en lineærtransformasjon mellom to vektorrom V og W og la U være et underrom av V. Vis at

$$T(U) = \{T(u) \mid u \in U\}$$

er et underrom av W.

Oppgave 10 La $A \neq 0$ være en $n \times n$-matrise slik at $A^3 = 0$. Vis at $I - A$ er en inverterbar matrise. *Hint: En matrise B er inverterbar hvis det finnes en matrise C slik at $BC = I = CB$.*