Flervalg

Oppgave 1 La $P(z)$ være et polynom av grad $n > 0$. Hvilket av følgende utsagn er korrekt?

(a) $P(z)$ har alltid minst ett reelt nullpunkt.

(b) $P(z)$ kan i noen tilfeller ha flere enn n komplekse nullpunkter.

(c) $P(z)$ har alltid nøyaktig n komplekse nullpunkter og disse er nødvendigvis distinkte (forskjellige).

(d) $P(z)$ har alltid nøyaktig n komplekse nullpunkter, og noen av dem kan være sammenfallende.

(e) $P(z)$ kan ha færre enn n komplekse nullpunkter (telt med multiplisitet)

Oppgave 2 Alternativene foreslår ulike operasjoner man kan gjøre på en totalmatrise $[A \mid \mathbf{b}]$ for en vektorligning $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Huk av for operasjonene som ikke forandrer den resulterende løsningsmengden.

(a) Multiplisere en rad med en konstant forskjellig fra 0

(b) Erstatte rad k med summen av rad k og rad j

(c) Bytte om rad k med rad j

(d) Erstatte første rad med summen av to andre rader

(e) Sette $a_{i1} = 0$ for alle $i \neq 1$ (dvs sette alle elementer i første kolonne unntatt det første lik null)

(f) Multiplisere totalmatrisen $[A|b]$ med en inverterbar matrise M, dvs erstatte $[A|b]$ med $[MA|Mb]$

(g) Legge til en konstant $\alpha \neq 0$ for alle diagonalelementene i matrisen

Oppgave 3 La A være en 3×5-matrise. Hvilken av følgende påstander kan **ikke** stemme?

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har nøyaktig én løsning.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.

(c) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har ingen løsninger.

(d) $\dim \operatorname{Col}(A) = 3$.

(e) $\dim \operatorname{Null}(A) = 3$.

Oppgave 4 La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvilken av de følgende alternativene ligger i nullrommet til A?

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 5 La A og B være 2×2-matriser. Hvis determinanten til A er lik 3 og determinanten til B er lik 4, hva er determinanten til $C = B^T A B^{-1}$?

(a) 3

(b) 4

(c) 12

(d) 28

Oppgave 6 Vi har oppgitt en matrise A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hva er dimensjonen til nullrommet av matrisen A?

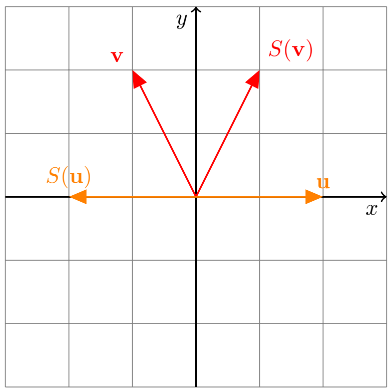
(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

Oppgave 7 La $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen som speiler vektorer i $\mathbb{R}^2$ om x-aksen.



Hva er egenverdiene til lineærtransformasjonen?

(a) $0, -1$ og 1

(b) 0 og 1

(c) -1 og 1

(d) Kun 1

Oppgave 8 La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være vektorer i et indreproduktrom V. Kryss av alle utsagn som generelt er sanne.

(a) Hvis $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ så er enten $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{w} = \mathbf{0}$

(b) Hvis $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ så er $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$

(c) Formelen $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{4}(\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2)$ holder

(d) $\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

(e) Vektoren $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v}$ er ortogonal på $\mathbf{v}$

(f) Hvis U er underrommet av V utspent av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ så er $\dim U^{\perp} = 2$

Oppgave 9 La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvilken av følgende vektorer er en egenvektor til A?

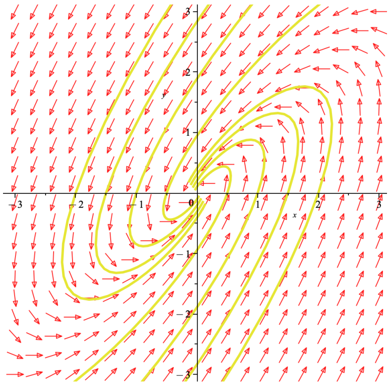
(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 10 Ett system av differensialligniner $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ har faseplott som angitt på figuren. Velg alternativ som korrekt beskriver egenverdiene til A.



(a) A har to reelle egenverdier, begge positive

(b) A har to reelle egenverdier, en positiv og en negativ

(c) A har to reelle egenverdier, begge negative

(d) A har komplekse egenverdier $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ og $\overline{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ der $\alpha > 0,\ \beta \neq 0$

(e) A har komplekse egenverdier $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ og $\overline{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ der $\alpha < 0,\ \beta \neq 0$

Langsvar

Oppgave 1 Vis at $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, og finn deretter alle løsninger av $\overline{z}z^3 = \mathrm{i}$. Her er $\overline{z}$ den kompleks-konjugerte av det komplekse tallet z. Svaret skal skrives på standardform $a + \mathrm{i}b$.

Oppgave 2 For hvilke a har ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2, \\ -3x & - & 4y & + & z & = & 0, \\ 4x & + & 9y & + & (2a^2+4)z & = & 2a+9, \end{array}$$

én løsning, ingen løsninger og uendelig antall løsninger?

Oppgave 3 La $U \subseteq \mathbb{R}^3$ være underrommet utspent av vektorene

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Finn en ortonormal basis for U, og finn deretter standardmatrisen til ortogonalprojeksjonen $P_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som projiserer en vektor i $\mathbb{R}^3$ til U.

Oppgave 4 La V være et vektorrom av dimensjon 3, og la $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ være en basis for V. $T\colon V \to V$ er en lineærtransformasjon fra V til V. Det er oppgitt at

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} - \mathbf{u}, \quad T(\mathbf{w}) = \mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Finn $T^2(\mathbf{u})$, $T^2(\mathbf{v})$ og $T^2(\mathbf{w})$ uttrykt ved $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. Finn så matrisen B til T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$. Det vil si $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

Oppgave 5 Familien Sorg har enten brødskiver, havregrøt eller eggerøre til frokost. Fru Sorg har observert at hva de velger til frokost avhenger av hva de hadde forrige dag, og foreslår at frokostvalget følger følgende mønster:

- Hvis de hadde brødskiver dagen før så er det 10% sannsynlighet for at de har havregrøt til frokost, og 10% sannsynlighet for at de har eggerøre til frokost.
- Hvis de hadde havregrøt dagen før så er det 40% sannsynlighet for at at de har brødskiver til frokost, og 40% sannsynlighet for at de har eggerøre til frokost.
- Hvis de hadde eggerøre dagen før så er det 40% sannsynlighet for at de har brødskiver til frokost, og 40% sannsynlighet for at de har havregrøt til frokost.

Skriv opp overgangsmatrisen A som beskriver mønsteret, beregn $A \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, og bestem hva sannsynligheten blir i det lange løp for at familien Sorg har brødskiver til frokost.

Oppgave 6 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 7 La $\mathbf{u}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$ slik at $\|\mathbf{u}\| = 1$ og definer matrisen H som

$$H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

Vis at $H^{-1} = H$ og finn H sine egenverdier.