Flervalg

Oppgave 1 La $P(z)$ være et polynom av grad $n > 0$. Hvilket av følgende utsagn er korrekt?

(a) $P(z)$ har alltid minst ett reelt nullpunkt.

(b) $P(z)$ kan i noen tilfeller ha flere enn n komplekse nullpunkter.

(c) $P(z)$ har alltid nøyaktig n komplekse nullpunkter og disse er nødvendigvis distinkte (forskjellige).

(d) $P(z)$ har alltid nøyaktig n komplekse nullpunkter, og noen av dem kan være sammenfallende.

(e) $P(z)$ kan ha færre enn n komplekse nullpunkter (telt med multiplisitet)

Løsning: Hvis vi teller med multiplisitet har $P(z)$ alltid nøyaktig n komplekse nullpunkter. Det vil si svaralternativ (d).

Oppgave 2 Alternativene foreslår ulike operasjoner man kan gjøre på en totalmatrise $[A \mid \mathbf{b}]$ for en vektorligning $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Huk av for operasjonene som ikke forandrer den resulterende løsningsmengden.

(a) Multiplisere en rad med en konstant forskjellig fra 0

(b) Erstatte rad k med summen av rad k og rad j

(c) Bytte om rad k med rad j

(d) Erstatte første rad med summen av to andre rader

(e) Sette $a_{i1} = 0$ for alle $i \neq 1$ (dvs sette alle elementer i første kolonne unntatt det første lik null)

(f) Multiplisere totalmatrisen $[A|b]$ med en inverterbar matrise M, dvs erstatte $[A|b]$ med $[MA|Mb]$

(g) Legge til en konstant $\alpha \neq 0$ for alle diagonalelementene i matrisen

Løsning: (a), (b) og (c) er tillatte radoperasjoner vi kjenner fra notatene.
(f) er også korrekt: Hvis $\mathbf{y}$ er en løsning til $A\mathbf{x}$ så får vi $MA\mathbf{y} = M(A\mathbf{y}) = M\mathbf{b}$, dvs. $\mathbf{y}$ er også en løsning til $MA\mathbf{x} = M\mathbf{b}$. Hvis $\mathbf{v}$ er en løsning på $MA\mathbf{x} = M\mathbf{b}$, får vi (siden M er inverterbar)

$$A\mathbf{v} = IA\mathbf{v} = (M^{-1}M)A\mathbf{v} = M^{-1}(MA\mathbf{v}) = M^{-1}M\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

dvs. $\mathbf{v}$ er også en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(d) stemmer ikke. Moteksempel: La

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

vi erstatter første rad med summen av de to andre:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Originalt hadde vi kun løsningen $(x, y, z)^T = (1, 1, 1)^T$, mens fra den nye totalmatrise får vi løsningene $(x, y, z)^T = (0, 1, 1)^T + t(1, 0, 0)$ for $t \in \mathbb{R}$.

(e) stemmer ikke. Moteksempel: La

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

hvis vi endrer totalmatrisen slik alternativet sier får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Originalt hadde vi løsningen $(x, y)^T = (1, 1)^T$, mens den nye totalmatrisen gir ingen løsninger.

(g) stemmer ikke. Moteksempel: La

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Vi legger til $\alpha = 1$ langs diagonalen og får

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Originalt hadde vi kun løsningen $(x, y)^T = (1, 1)^T$, men den nye totalmatrisen gir løsningene $(x, y)^T = (1, 0) + t(1, -1)^T$ for $t \in \mathbb{R}$.

Riktig svar er derfor: (a), (b), (c) og (f).

Oppgave 3 La A være en 3×5-matrise. Hvilken av følgende påstander kan **ikke** stemme?

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har nøyaktig én løsning.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.

(c) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har ingen løsninger.

(d) $\dim \mathrm{Col}(A) = 3$.

(e) $\dim \mathrm{Null}(A) = 3$.

Løsning: En matrise kan ikke ha flere pivotelement enn antall rader, altså kan det maksimalt være 3 pivotelement i den radreduserte matrisen. Det vil si at $\dim \mathrm{Col}\, A \leq 3$ og $5 \leq \dim \mathrm{Null}\, A \geq 5 - 3 = 2$. Hvis du har én løsning $\mathbf{y}$ til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan du dermed konstruere uendelig mange flere løsninger, $\mathbf{y} + \mathbf{v}t$ hvor $\mathbf{v} \in \mathrm{Null}\, A$ og $t \in \mathbb{R}$.

Oppgave 4 La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvilken av de følgende alternativene ligger i nullrommet til A?

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Løsning:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2+3 \\ 1-1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det vil si at (c) er korrekt.

Oppgave 5 La A og B være 2×2-matriser. Hvis determinanten til A er lik 3 og determinanten til B er lik 4, hva er determinanten til $C = B^T A B^{-1}$?

(a) 3

(b) 4

(c) 12

(d) 28

Løsning:

$$\det(B^T A B^{-1}) = \det(B^T) \det(A) \det(B^{-1}) = \det(B) \det(A) \frac{1}{\det B} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 3$$

(a) er korrekt.

Oppgave 6 Vi har oppgitt en matrise A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hva er dimensjonen til nullrommet av matrisen A?

(a) 0

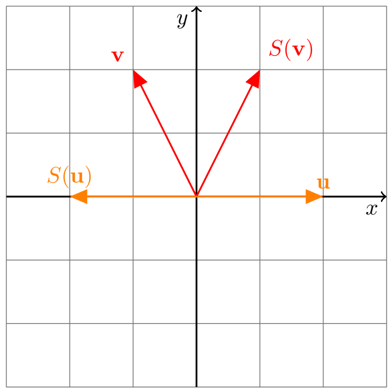
(b) 1

(c) 2

(d) 3

Løsning: A er på redusert trappeform og har 2 pivotelement. Dimensjonen til nullrommet er $4 - 2 = 2$.

Oppgave 7 La $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen som speiler vektorer i $\mathbb{R}^2$ om x-aksen.



Hva er egenverdiene til lineærtransformasjonen?

(a) $0, -1$ og 1

(b) 0 og 1

(c) -1 og 1

(d) Kun 1

Løsning: Hvis $(x, y)^T$ er en egenvektor har vi

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Hvis $x = 0$ får vi $\lambda = 1$ og hvis $y = 0$ får vi $\lambda = -1$. Egenverdiene er -1 og 1

Oppgave 8 La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være vektorer i et indreproduktrom V. Kryss av alle utsagn som generelt er sanne.

(a) Hvis $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ så er enten $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{w} = \mathbf{0}$

(b) Hvis $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ så er $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$

(c) Formelen $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{4}(\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2)$ holder

(d) $\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

(e) Vektoren $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v}$ er ortogonal på $\mathbf{v}$

(f) Hvis U er underrommet av V utspent av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ så er $\dim U^\perp = 2$

Løsning: (a) Dette stemmer ikke. For eksempel $\langle (1,0)^T, (0,1)^T \rangle = 0$

(b) Dette stemmer fra Pytagoras teorem.

(c) Dette stemmer.

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\
\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 &= \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\
\frac{1}{4}(\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2) &= \frac{1}{4}(4\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle
\end{aligned}
$$

(d) Dette stemmer ikke. Se eksempelet til (a).

(e) Dette stemmer. Dette er andre steg i Gram-Schmidt metoden for å lage en ortogonal basis fra $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

(f) Dette stemmer ikke. $1 \leq \dim U \leq 2$ og $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$, så hvis $\dim V$ er f.eks lik 5 eller høyere må $\dim U^\perp \geq 3$

De korrekte alternativene er: (b), (c) og (e)

Oppgave 9 La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvilken av følgende vektorer er en egenvektor til A?

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

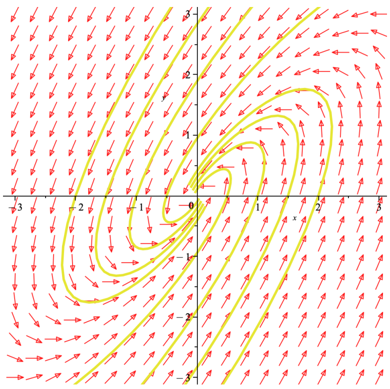
(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Løsning:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) er egenvektor med egenverdi 1.

Oppgave 10 Ett system av differensialligniner $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ har faseplott som angitt på figuren. Velg alternativ som korrekt beskriver egenverdiene til A.



(a) A har to reelle egenverdier, begge positive

(b) A har to reelle egenverdier, en positiv og en negativ

(c) A har to reelle egenverdier, begge negative

(d) A har komplekse egenverdier $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ og $\overline{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ der $\alpha > 0,\ \beta \neq 0$

(e) A har komplekse egenverdier $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ og $\overline{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ der $\alpha < 0,\ \beta \neq 0$

Løsning: Faseplottet viser sirkulære løsningskurver, og pilene angir en bevegelse inn mot origo. Dermed må egenverdiene til A være komplekse med negativ reell del. Dvs. (e) er korrekt alternativ.

Langsvar

Oppgave 1 Vis at $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, og finn deretter alle løsninger av $\overline{z}z^3 = \mathrm{i}$. Her er $\overline{z}$ den kompleks-konjugerte av det komplekse tallet z. Svaret skal skrives på standardform $a + \mathrm{i}b$.

Løsning: Vi finner

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$$

Det følger også at $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2}) = \mathrm{i}$. Hvis vi nå skriver $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ blir $\overline{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, og dermed

$$z^3\overline{z} = r^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}\, r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \;= r^4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$$

Derfor blir $r = 1$ og $\theta = \frac{\pi}{4}$ $(k = 0)$ eller $\theta = \frac{5\pi}{4}$ $(k = 1)$ slik at løsninger blir

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mathrm{i}) \text{ og } z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$$

Oppgave 2 For hvilke a har ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2, \\ -3x & - & 4y & + & z & = & 0, \\ 4x & + & 9y & + & (2a^2+4)z & = & 2a+9, \end{array}$$

én løsning, ingen løsninger og uendelig antall løsninger?

Løsning: Systemet har totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2a^2+4 & 2a+9 \end{array}\right].$$

Vi radreduserer

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2a^2+4 & 2a+9 \end{array}\right] \underset{II+3I}{\overset{III-4I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2a^2 & 2a+1 \end{array}\right]$$
$$\overset{1/2 \cdot II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2a^2 & 2a+1 \end{array}\right]$$
$$\overset{III-II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2a^2-2 & 2a-2 \end{array}\right]$$
$$\overset{1/2 \cdot III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right]$$

Vi ser at den begrensende delen er likningen som tilsvarer nederste rad, i.e. $(a^2-1)z = a-1$. Hvis $a=1$ så ser vi at likningen blir $0=0$, så vi får ett løsbart system med fri variabel, og dermed uendelig med løsninger. Hvis $a=-1$ så får vi $0z=-2$ som ikke er løsbart, så vi har ingen løsninger. For alle andre verdier av a har vi nøyaktig én løsning.

Oppgave 3 La $U \subseteq \mathbb{R}^3$ være underrommet utspent av vektorene

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Finn en ortonormal basis for U, og finn deretter standardmatrisen til ortogonalprojeksjonen $P_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som projiserer en vektor i $\mathbb{R}^3$ til U.

Løsning: Vi kaller basisvektorene for $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$. Den første finner vi ved å normalisere $\mathbf{u}$, vi beregner derfor først $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$. Vi finner

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Så bruker vi Gram-Schmidt til å beregne en vektor $\mathbf{w}$ som er ortogonal på $\mathbf{e}_1$ ved

$$\mathbf{w} = v - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - (\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (-1)) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi har $\|w\| = 3$ og skalerer for å finne

$$\mathbf{e}_2 = \frac{w}{\|w\|} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Projeksjonsmatrisen $[P_U]$ finnes ved

$$[P_U] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4 La V være et vektorrom av dimensjon 3, og la $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ være en basis for V. $T\colon V \to V$ er en lineærtransformasjon fra V til V. Det er oppgitt at

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} - \mathbf{u}, \quad T(\mathbf{w}) = \mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Finn $T^2(\mathbf{u})$, $T^2(\mathbf{v})$ og $T^2(\mathbf{w})$ uttrykt ved $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. Finn så matrisen B til T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$. Det vil si $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

Løsning: Vi beregner direkte ved innsetting og bruk av T sin linearitet

$$T^2(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w}) = \mathbf{w} - \mathbf{u} - (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = -2\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w},$$
$$T^2(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w}) - T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w},$$
$$T^2(\mathbf{w}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{w} - (\mathbf{w} - \mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}.$$

Til slutt er

$$B = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{u})]_{\mathcal{B}} & [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} & [T(\mathbf{w})]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5 Familien Sorg har enten brødskiver, havregrøt eller eggerøre til frokost. Fru Sorg har observert at hva de velger til frokost avhenger av hva de hadde forrige dag, og foreslår at frokostvalget følger følgende mønster:

- Hvis de hadde brødskiver dagen før så er det 10% sannsynlighet for at de har havregrøt til frokost, og 10% sannsynlighet for at de har eggerøre til frokost.
- Hvis de hadde havregrøt dagen før så er det 40% sannsynlighet for at at de har brødskiver til frokost, og 40% sannsynlighet for at de har eggerøre til frokost.
- Hvis de hadde eggerøre dagen før så er det 40% sannsynlighet for at de har brødskiver til frokost, og 40% sannsynlighet for at de har havregrøt til frokost.

Skriv opp overgangsmatrisen A som beskriver mønsteret, beregn $A \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, og bestem hva sannsynligheten blir i det lange løp for at familien Sorg har brødskiver til frokost.

Løsning: Vi vet at familien Sorg har en av de tre mulige frokostene hver dag, så den totale sannsynligheten må summere til 100%, dermed blir overgangsmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Vi observerer at denne matrisen er regulær, så etter en lengre periode burde fordelingen av frokosttype beskrives av likevektsvektoren til matrisen. Vi anmodes om å finne

$$A \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi funnet som forventet at $\lambda = 1$ er en egenvektor, og en tilhørende egenverdien er $[4, 1, 1]^T$. Fordi A er regulær er dette den eneste egenverdien tilhørende $\lambda = 1$, og den skaleres til å gi likevektsvektoren

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4+1+1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Sannsynligheten for at familien har brødskiver til frokost i det lange løp blir derfor 2/3.

Oppgave 6 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

Løsning: Vi beregner det karakteristiske polynomet

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

så egenverdiene er $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$. Vi løser deretter for egenvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Løsning: Vi har nå nok informasjon til så skrive opp generell løsning som

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Setter vi nå inn $t = 0$ får vi

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1$$

så løsningen blir

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 7 La $\mathbf{u}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$ slik at $\|\mathbf{u}\| = 1$ og definer matrisen H som

$$H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

Vis at $H^{-1} = H$ og finn H sine egenverdier.

Løsning: Den første delen vises ved direkte utregning ved å sjekke at $H^2 = I$.

$$H^2 = (I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T) \cdot (I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T + 4\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

I det siste leddet bruker vi at $\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{u})\mathbf{u}^T$ og deretter at $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = \|u\|^2 = 1$ og dermed fås

$$H^2 = I + (-2 - 2 + 4)\mathbf{u}\mathbf{u}^T = I$$

For egenverdiene kan man studere den definerende ligningen $H\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ der λ er en egenverdi og $\mathbf{x}$ en tilhørende egenvektor. Da fås

$$H\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{u}^T\mathbf{x})\mathbf{u} = \lambda\mathbf{x}, \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)\mathbf{x} = -2(\mathbf{u}^T\mathbf{x})\mathbf{u}$$

Her er det to muligheter; enten må $\mathbf{x}$ være et multiplum av $\mathbf{u}$ eller så må $\mathbf{x}^T\mathbf{u} = 0$ og i sistnevnte tilfelle må da også $\lambda = 1$. Hvis $\mathbf{x}$ er proporsjonal med $\mathbf{u}$ kan vi like godt sette $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ og da blir $\lambda - 1 = -2\mathbf{u}^T\mathbf{u} = -2$ så $\lambda = -1$. Vi merker oss at det fins nøyaktig en egenvektor tilhørende $\lambda = -1$ (nemlig $\mathbf{x} = \mathbf{u}$) mens det blir $n - 1$ egenvektorer tilhørende $\lambda = 1$, nemlig de som ligger i $\mathrm{Sp}(\mathbf{u})^\perp$