Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4110 Matematikk 3**

Fagleg kontakt under eksamen: Gereon Quick[a], Morten Solberg[b]

Tlf: [a] 485 01 412 , [b] 980 52 556

Eksamensdato: 1. desember 2021

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C: Spesifiserte trykte og handskrivne hjelpemiddel tillatne. Bestemt, enkel kalkulator tillate (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annan informasjon:
Eksamen består av ti deloppgåver. Alle deloppgåvene tel likt. Alle svara skal grunngjevast. I år spesifiserar me at INGEN trykte eller handskrivne hjelpemiddel er tillatne.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgåve	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
svart/kvit ☒	**fargar** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐	

Dato Sign

Oppgåve 1 Finn alle røtene til $p(z) = z^4 + 16$ og skisser dei i det komplekse planet. Faktoriser $p(z)$ i lineære faktorar.

Oppgåve 2 Sjå på dei tre punkta

$$(0, -3), (1, -1) \text{ og } (2, 5)$$

i $\mathbb{R}^2$.

Finn polynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ av grad to, som går gjennom alle desse punkta og bruk minste kvadrats metode til å finne polynomet $q(x) = dx + e$ av grad ein som høver dei tre punkta best.

Oppgåve 3 La A vere 3×3-matrisa

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & 4 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 6 & a+1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn alle reelle tal a slik at $\det A \neq 0$. Finn dimensjonen til $\operatorname{Col} A$ (kolonnerommet til A) for alle verdiar av a.

b) Avhengig av a, finn alle reelle tal b slik at systemet

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ b \\ 8 \end{bmatrix}$$

har ei løysing.

Oppgåve 4 La

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

La $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vere lineærtransformasjonen gjeve ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) Gi ei geometrisk tolking av kva denne lineærtransformasjonen gjer og rekn ut A^{2021}.

b) Finn eigenverdiane til A og gi ei geometrisk tolking av at dei ikkje er reelle.

Oppgåve 5 La $V = \mathcal{C}[0,1]$ vere vektorrommet av alle kontinuerlege funksjonar $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, og sjå på underrommet $U = \mathrm{Sp}\{1, x\}$. La $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Dette er eit indreprodukt for $V = \mathcal{C}[0,1]$.

a) Finn ein ortogonal basis for U.

b) La $h(x) = e^x$. Finn $\mathrm{Proj}_U(h(x))$.
Hint: $((x-1)e^x)' = xe^x$.

Oppgåve 6 Finn ei reell 2×2-matrise A som høyrer til systemet av differensiallikninger $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ med løysinger

$$e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \text{ og } e^{2t}\left(\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Oppgåve 7

La

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 2 & -1\\3 & 0 & -4\end{bmatrix},$$

Finn ei inverterbar 3×3-matrise A slik at

$$3A = A^2 - AB$$

og forklar kvifor det ikkje finst ei inverterbar 3×3-matrise A slik at

$$2A = A^2 - AB.$$