Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag tlf. 73 59 35 21, 483 01 988
Eirik Spets tlf. 73 55 95 02, 907 64 722

EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3

Bokmål
Onsdag 20. desember 2006
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 19. januar 2007

Alle svar (unntatt på oppgave 3) skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hvert bokstavpunkt og oppgavene 1, 3, 4 og 7 teller i utgangspunktet likt ved sensuren.

Oppgave 1 Løs ligningen

$$z^3 = \frac{4}{1 - i\sqrt{3}}\,.$$

Skriv løsningene på formen $re^{i\theta}$ og vis på en figur hvor de ligger i det komplekse plan.

Oppgave 2 Finn generell løsning av differensialligningene

a) $y'' - y' + 2.5y = 0,$

b) $y'' + y' - 2y = x + e^{-2x},$

c) $4x^2y'' + 8xy' - 3y = 0, \quad x > 0.$

Oppgave 3 *Flervalgsoppgave, svar uten begrunnelse ved å velge ett alternativ på hvert spørsmål.*

La $y_1(x)$ og $y_2(x)$ være to løsninger av ligningen $y'' + ay' + by = 0$ der a og b er konstanter. Hvis Wronskideterminanten $W(y_1, y_2)$ er lik 0 for $x = 0$, hva er da $W(y_1, y_2)$ for $x = 1$?

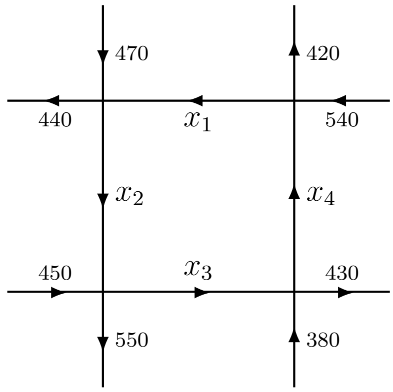
A: 0 **B:** 1 **C:** e **D:** Den avhenger av a og b.

Hvilken av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ ligger i nullrommet Null(A) for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

A: $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 1)$ **B:** $\mathbf{v}_2 = (2, -3, 1)$ **C:** $\mathbf{v}_3 = (-2, 3, 1)$ **D:** $\mathbf{v}_4 = (-1, 2, 0)$

Oppgave 4 I en by er det fire enveiskjørte gater som krysser hverandre som vist på figuren. Antall biler som passerer pr. time er angitt på figuren.



Angi et ligningssystem på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ må tilfredsstille, og løs systemet.

Hva blir x_1, x_2 og x_3 hvis strekningen med x_4 biler pr. time blir stengt for gjennomkjøring slik at $x_4 = 0$?

Oppgave 5 En matrise A og en vektor $\mathbf{b}$ er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for radrommet Row(A) og en basis for kolonnerommet Col(A).

b) Hva er dimensjonen til Row(A), Col(A) og det ortogonale komplementet Row$(A)^\perp$?

c) Vis at det ortogonale komplementet Col$(A)^\perp$ er utspent av vektoren $\mathbf{u} = (3, -1, 1, 3)$. Finn, for eksempel ved å gjøre bruk av $\mathbf{u}$, en betingelse som b_1, b_2, b_3 og b_4 må oppfylle dersom ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ skal ha løsning.

Oppgave 6

a) Bestem egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finn en ortogonal matrise P med determinant lik 1 slik at $P^T AP$ blir en diagonalmatrise.

b) Et kjeglesnitt har ligning

$$3x^2 + 4xy - 1 = 0.$$

Innfør et nytt, rotert koordinatsystem slik at kjeglesnittet er i standardposisjon i forhold til det nye koordinatsystemet. Lag en figur som viser hvordan kjeglesnittet og de nye koordinataksene ligger i xy-planet.

Oppgave 7 La A være en $n \times n$–matrise.

Vis at hvis 5 er en egenverdi for A, så er 3 en egenverdi for $A - 2I$ der I betegner $n \times n$–identitetsmatrisen.

Vis også at hvis $\mathbf{v}$ er en n–vektor som oppfyller $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ og $A^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$, så er $\mathbf{v}$ og $A\mathbf{v}$ lineært uavhengige.