Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for dette og hint

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag 7359 3521

Bokmål

EKSAMEN I FAG TMA4110 MATEMATIKK 3

10. august 2004
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S).
Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren faller 1. september 2004.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 Finn alle komplekse tall z som oppfyller likninga

$$z^3 = \sqrt{3} + i.$$

og tegn løsningene i det komplekse plan.

Oppgave 2 Gitt initialverdiproblemet

$$(*) \qquad (x+1)y' - y = x, \quad y(0) = 1, \quad x > -1.$$

a) Finn løsningen $y(x)$ av $(*)$.

b) Tilnærm $y(\frac{3}{2})$ ved hjelp av Eulers metode med skrittlengde $h = \frac{1}{2}$.

Oppgave 3

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

b) Finn den generelle løsning av differensiallikninga

$$y'' + 2y' + y = \sin x.$$

c) Vis at differensiallikninga

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

har to lineært uavhengige løsninger på form $y = x^p$.

Løs differensiallikninga

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x \ln x, \quad x > 0.$$

(En kan få bruk for at $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}(1 + \ln x) + C$.)

Oppgave 4

a) Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

b) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for hvert av rommene Null(A), Row(A), Col(A) og Col(A)$^\perp$.

Oppgave 5

a) Vis at vektorene $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, og $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ er lineært uavhengige.

b) La V være underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Finn en ortogonal basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ for V ved å bruke Gram-Schmidt-algoritmen på $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Oppgave 6 Gitt matrisa $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$, der a er et vilkårlig reelt tall.

a) Vis at $\det A = 0$ når $a = 1$. Regn så ut $\det A$ for alle verdier av a.

b) Vis at A har egenverdiene $a - 1$ og $a + 2$, og finn de tilhørende egenvektorene.

c) Løs følgende system av differensiallikninger:

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + ay_2 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 + ay_3 \end{aligned}$$

Oppgave 7 Vis at dersom matrisene A og B er similære og matrisene B og C er similære, så er også matrisene A og C similære.