Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag for eksamen i Matematikk 3 - TMA4115

Vår 2010

$\boxed{1}$ **a)** La $z = x + i\,y$. Da er $|\operatorname{Re} z| = |x|$ og $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Siden y er et reelt tall er $0 \leq y^2$. Det betyr at $x^2 \leq x^2 + y^2$. Siden $f(t) = \sqrt{t}$ er strengt stigende så har vi $|\operatorname{Re} z| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

b) Alternativ 1: Vi bruker formel for løsning av annengradslikninger:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1 - 2i)}}{2 \cdot 1} = \frac{2i \pm \sqrt{-4 - 4(-1 - 2i)}}{2}$$

$$= \frac{2i \pm \sqrt{8i}}{2} = i \pm \sqrt{2i}$$

Finner $\sqrt{2i}$: $\theta = \arg 2i = \pi/2$ og $r = |\,2i\,| = 2$. Dvs $\sqrt{2i} = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi/2 + 2k\pi}{2}) = \pm(1 + i)$, $k = 0, 1$. Vi får dermed $z = i \pm (1 + i)$. Dvs $z_1 = 1 + 2i$ og $z_2 = -1$.

Alternativ 2: Vi prøver med små hele reelle tall for z og finner ut at $z = -1$ er løsning:

$$(-1)^2 - 2i \cdot (-1) - 1 - 2i = 1 + 2i - 1 - 2i = 0$$

Polynomdivisjon gir

$$\begin{array}{rl}
(z^2 - 2i\,z \quad -1 - 2i \quad) : (z + 1) = z - (1 + 2i) & \\
-(z^2 + z) \qquad\qquad\quad & \\
\hline
-2iz - z \quad -1 - 2i & \\
-(-2iz - z \quad -1 - 2i) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Det gir $z^2 - 2iz - 1 - 2i = (z + 1)(z - 1 - 2i) = 0$. Dvs $z + 1 = 0$ eller $z - 1 - 2i = 0$. Vi får løsningene $z_1 = -1$ og $z_2 = 1 + 2i$.

Alternativ 3: Vi setter inn $z = x + iy$ inn i likningen:

$$(x + iy)^2 - 2i(x + iy) - 1 - 2i = 0$$

$$(x^2 - y^2 + 2y - 1) + 2i(xy - x - 1) = 0$$

Dvs at $xy - x - 1 = 0$ og $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$. Løser vi den første likningen får vi $y = \frac{x+1}{x}$. Setter vi dette inn i den andre likningen får vi $x^2 - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} + \frac{2x + 2}{x} - 1 = 0$. Vi multipliserer med x^2 på begge sider og forenkler: $x^4 - 1 = 0$. Vi ser at de eneste reelle løsningene for x er $x = -1$ og $x = 1$. Da får vi tilhørende $y = 0$ og $y = 2$. Løsningene er $z = -1$ og $z = 1 + 2i$.

$\boxed{2}$ **a)** Den karakteristiske likningen er $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$. Vi løser denne og finner røttene: $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 3$. Det gir den generelle løsningen $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} =$

$c_1e^x + c_2e^{3\,x}$. Den deriverte av løsningen er $y'(x) = c_1e^x + 3c_2e^{3\,x}$. Initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$ gir likningene $c_1 + c_2 = 1$ og $c_1 + 3c_2 = 2$. Vi løser systemet og får $c_1 = c_2 = 1/2$. Det gir løsningen på initalverdiproblemet:

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{3\,x}\right).$$

b) Homogen løsning fant vi i punkt a), $y_h(x) = c_1e^x + c_2e^{3\,x}$. Vi bruker ubestemte koeffisienters metode: Fordi e^x er en løsning av den homogene likningen må vi modifisere med å multiplisere Be^x med x i den spesielle løsningen $y_p = A+Bxe^x$. Vi deriverer to ganger; $y_p' = B(1+x)e^x$ og $y_p'' = B(2+x)e^x$, setter inn i likningen og får

$$B(2 + x)e^x - 4B(1 + x)e^x + 3(A + Bxe^x) = 3 - 4e^x.$$

Forenkling gir

$$-2Be^x + 3A = 3 - 4e^x.$$

Det gir $B = 2$ og $A = 1$. Derfor er $y_p(x) = 1 + 2xe^x$. Den generelle løsningen er

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c_1 + 2x)e^x + c_2e^{3\,x} + 3.$$

$\boxed{3}$ Vi bruker reduksjon av orden. Vi har løsningen $y_1(x) = x$. La $y_2 = u(x)y_1(x) = x\,u(x)$. Deriverer vi to ganger får vi $y_2' = u + xu'$ og $y_2'' = 2u' + xu''$. Vi setter inn i likningen

$$(2u' + xu'') - (3x^2 + 4x^{-1})(u + xu') + (3x + 4x^{-2})xu = 0$$

og multipliserer ut parantesene;

$$2u' + xu'' - (3x^2u + 3x^3u' + 4x^{-1}u + 4u') + (3x^2u + 4x^{-1}u) = 0.$$

Når vi trekker sammen får vi

$$xu'' - 3x^3u' - 2u' = 0.$$

Vi setter $U = u'$ og separerer

$$\frac{U'}{U} = 3x^2 + \frac{2}{x}.$$

Integrerasjon med hensyn på x gir

$$\ln U = x^3 + \ln(x^2).$$

(Vi sløyfer integrasjonskonstanten og krever at U er positiv). Vi tar eksponensialfunksjonen av begge sider av uttrykket.

$$U = e^{(x^3)}e^{ln(x^2)} = x^2e^{(x^3)}.$$

Vi finner nå $u = \int u'\,dx = \int U\,dx = \int x^2e^{(x^3)}\,dx = \frac{1}{3}e^{(x^3)}$. Vi får derfor $y_2 = \frac{1}{3}x\,e^{(x^3)}$.

Alternativt: Vi kan også bruke en formel

$$u' = \frac{1}{(y_1)^2}e^{-\int p(x)\,dx} = \frac{1}{x^2}e^{\int(3x^2+4/x)dx} = \frac{1}{x^2}e^{(x^3+4\ln|x|)} = x^2e^{(x^3)}.$$

4 **a)** Wronskideterminanten er

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \\ = e^{\lambda t}\cos(\omega t)(\lambda e^{\lambda t}\sin(\omega t) + \omega e^{\lambda t}\cos(\omega t)) \\ - e^{\lambda t}\sin(\omega t)(\lambda e^{\lambda t}\cos(\omega t) - \omega e^{\lambda t}\sin(\omega t)) \\ = \omega e^{2\lambda t}\cos^2(\omega t) + \omega e^{2\lambda t}\sin^2(\omega t) = \omega e^{2\lambda t} \end{aligned}$$

Løsningene til karakteristisk likning

$$r^2 + cr + k = 0$$

er $r = \lambda \pm i\omega = \frac{-c\pm\sqrt{c^2-4k}}{2}$, (siden vi har underdempet svingning er $c^2 - 4k < 0$). Dvs

$$\lambda \pm i\omega = \frac{-c \pm i\sqrt{4k - c^2}}{2} = \frac{-c}{2} \pm i\sqrt{k - c^2/4}.$$

Dvs $\lambda = -c/2$ og $\omega^2 = k - c^2/4$. Wronskideterminanten blir

$$W = \sqrt{k - c^2/4}e^{-ct}$$

b) Maksimums-amplituden er gitt ved $A_0 e^{\lambda t}$. En svingning varer 2 sekund. Dvs 15 svingninger tar 30 sekunder. Det gir $A_0 e^{-\frac{c}{2}(t_0+30)} = \frac{1}{4}A_0 e^{-\frac{c}{2}t_0}$. Vi løser og får $e^{-15c} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -15c = \ln\frac{1}{4} \Leftrightarrow c = (\ln\frac{1}{4})/(-15) \approx 0{,}0924$.

5 **a)** Svaralternativ **A** er riktig fordi en 4×3 matrise kan kun ha rank 0, 1, 2 eller 3. Av samme grunn er B, C og D feil.

- B er feil fordi rangen til A kan være for eksempel 2 som ikke er lik 3
- C er feil fordi rangen til A kan være for eksempel 2 som er mindre enn 3
- D er feil fordi rangen til A ikke kan være 4.

b) Løsning **D** er riktig.

Systemet kan skrives $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med koeffisientmatrise

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

og $\mathbf{b} = [5, 0, -5]^T$. Normalsystemet er $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. Vi har

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}, \text{ og } A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skriver opp totalmatrisen til normalsystemet og utfører GJ:

$$\begin{bmatrix} 11 & -6 & 10 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid : (-6) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 11 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 11 & -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-11) \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid : 5 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dvs $\bar{x} = 2$ og $\bar{y} = 2$. Dvs alternativ **D**.

$\boxed{6}$ Vi utfører Gauss-Jordan eliminasjon på A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & 2 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har 4 frie variable. $x_2 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$ og $x_6 = t_4$. Fra den reduserte matrisen får vi at $x_1 = -2t_1 - t_2 - 2t_3 - t_4$ og $x_3 = 3t_2 + 4t_3 + 4t_4$. Da er

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2t_1 - t_2 - 2t_3 - t_4) \\ t_1 \\ (3t_2 + 4t_3 + 4t_4) \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for Null(A) er

$\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$

Basis for Row(A) er radene forskjellig fra 0-radene i matrisen E:

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & -4 \end{bmatrix}^T \right\}$

Basis for Col(A) er 1. og 3. søyle i A, (pivotsøylene).

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}$

Basis for Col$(A)^\perp$ finner vi ved å finne basis for nullrommet til

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Systemet $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$ har løsningsrom utspent av $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$, så en basis for Col$(A)^\perp$ er

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$

Projeksjonen av $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ på Col(A) finner vi ved først å projisere $\mathbf{e}_3$ ned på Col$(A)^\perp$. La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$. Den projiserte av $\mathbf{e}_3$ ned på Col$(A)^\perp$ er gitt ved

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Dvs den projiserte av $\mathbf{e}_3$ ned på Col(A) er

$$\mathbf{p} = \mathbf{e}_3 - \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}^T$$

Vi kunne også brukt minste kvadraters metode eller gått via en ortogonal basis for Col(A).

$\boxed{7}$ **a)** Karakteristisk likning til A er $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)^2 - 2(2-\lambda)$
$= (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) = (2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) = 0$. Det gir egenverdiene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 4$.

Vi finner egenvektorene tilhørende $\lambda_1 = 1$ ved å løse $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det gir egenvektorene $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

Vi finner egenvektorene tilhørende $\lambda_2 = 2$ ved å løse $(A-2\,I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Dette gir egenvektorene $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

Vi finner egenvektorene tilhørende $\lambda_3 = 4$ ved å løse $(A-4\,I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Dette gir egenvektorene $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

b) I oppgave 7a fant vi egenverdiene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 4$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ og $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Hvis vi velger $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ så er $A = PDP^{-1}$.

Det er mulig å velge P slik at $P^{-1} = P^T$ fordi A er symmetrisk. Generelt gjelder at når A er en symmetrisk $n \times n$ matrise, så finnes en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer til A.

c) Generell løsning for systemet er

$$\mathbf{y}(t) = c_1\, e^{1t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3\, e^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Initialbetingelsen gir oss

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi bruker GJ på totalmatrisen til dette systemet.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \;\; | : 6$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Initialverdisystemet har altså løsningen

$$\mathbf{y}(t) = 1\, e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\, e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1\, e^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hver av komponentene til $\mathbf{y}(t)$ er:

$$\begin{array}{rclll} y_1(t) & = & e^t & & +2\, e^{4t} \\ y_2(t) & = & -e^t & +2\, e^{2t} & +\ e^{4t} \\ y_3(t) & = & -e^t & -2\, e^{2t} & +\ e^{4t}. \end{array}$$

$\boxed{8}$ **a)** Første del er lett: $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0\cdot 0 + k \cdot 0) & (0 \cdot k + 0 \cdot 0) \\ (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) & (0 \cdot k + 0 \cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Den andre delen kan løses på følgende måte $\det(I + A) = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - k \cdot 0 = 1 \neq 0$ og derfor invertibel.

b) Den inverse til $I + B$ er $I - B$ fordi $(I + B)(I - B) = (I + B)I - (I + B)B = (I^2 + BI) - (IB + B^2) = I^2 + B - B + B^2 = I + B - B + 0 = I$. Derfor: Ja, $I + B$ er invertibel.

Er B diagonaliserbar? Først viser vi at B bare har en egenverdi, nemlig 0. Hvis λ er en egenverdi med tilhørende egenvektor $\mathbf{v}$. Så er

$$B\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Om vi multipliserer med B fra venstre på begge sider av likningen, får vi:

$$B^2\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$$

Vi gjør om høyre side ved å bruke $B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ og venstre side ved å bruke $B^2 = 0$.

$$\mathbf{0} = \lambda^2\mathbf{v}.$$

Siden $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så må vi ha at $\lambda = 0$. Dvs $\lambda = 0$ er eneste egenverdi. Nå kan vi finne alle egenvektorene. Dvs løse $B\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$. For at B skal være diagonaliserbar, må vi finne n lineært uavhengige egenvektorer. Det betyr at $\text{Null}(B)$ er egenrommet til B tilhørende egenverdien 0. Hvis B ikke er en matrise med bare nuller så vil $\text{rank}(B) > 0$. Da er $\dim \text{Null}(B) = n - \text{rank}(B) < n$. Dvs at B har mindre enn n lineært uavhengige egenvektorer og derfor er ikke B diagonliserbar.

Vi kunne også undersøkt under hvilken betingelse B er diagonaliserbar:

Om B er diagonaliserbar (og $B^2 = 0$) har vi at D er nullmatrisen 0 og følgelig må $B = PDP^{-1} = P0P^{-1} = 0$.

Svaret er som følgende når $B^2 = 0$ og $B \neq 0$ så er B ikke diagonaliserbar.

Alternativt: Hvis B er diagonaliserbar så har vi $B = PDP^{-1}$. Derfor er $0 = B^2 = PD^2P^{-1}$. Da må også $D^2 = P^{-1}0P = 0$ og derfor $D = 0$, fordi D er diagonal. Følgelig er $B = PDP^{-1} = 0$.