NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4115 Matematikk 3
eksamen 4. juni 2009

Løsningsforslag

1 Innsatt for $z = x + iy$ kan ligningen skrives

$$|x + 1 + i(y - \sqrt{3})| = |x - 1 + i(y + \sqrt{3})|.$$

Ved å benytte at $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ for et kompleks tall $z = a + ib$, får vi at

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y - \sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y + \sqrt{3})^2},$$

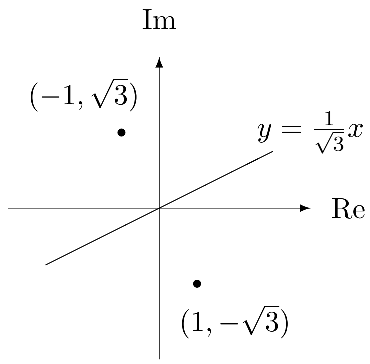
altså at

$$(x+1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = (x-1)^2 + (y + \sqrt{3})^2.$$

Denne ligningen forenkles til

$$4\sqrt{3}y = 4x.$$

Altså vil alle komplekse tall $z = x + iy$ som tilfredstiller den oppgitte likheten være på formen $z = x\left(1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Det vil si, alle komplekse tall som ligger på den rette linjen $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.



2 Tilhørende homogen ligning er gitt ved

$$(*) \qquad y'' - 6y' + 9y = 0,$$

og har karakteristisk ligning $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$, så $(*)$ har generell løsning

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

For å finne partikulærløsningen benytter vi ubestemte koeffisienters metode, som i dette tilfellet gir at at $y_p(x) = Ax^2e^{3x}$. Innsatt i

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = 4e^{3x}$$

får vi at

$$(9x^2 + 18x + 2)Ae^{3x} - 6(3x + 2)Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} = 2Ae^{3x} = 4e^{3x},$$

så $A = 2$. Altså er generell løsning til $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$ gitt ved

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + 2x^2)e^{3x}.$$

3 Tilhørende homogen ligning er gitt ved

$$(*) \qquad x^2 y'' - 2y = 0.$$

Dette er en homogen Euler–Cauchy ligning. Disse har løsning på formen $y(x) = x^m$. Innsatt gir dette

$$\begin{aligned} x^2 m(m-1)x^{m-2} - 2x^m &= 0 \\ x^m(m^2 - m - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Hjelpeligningen $m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2) = 0$ har løsning $m_1 = -1$ og $m_2 = 2$. Altså har $(*)$ generell løsning

$$y(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^2.$$

For å finne partikulærløsningen til $x^2 y'' - 2y = 16x^3 \ln x$, $x > 0$, bruker vi variasjon av parametre. For å kunne gjøre det må vi skrive ligningen på formen

$$y'' - \frac{2}{x^2} y = 16x \ln x.$$

Basisløsningene til den tilhørende homogene ligningen er $y_1(x) = x^{-1}$ og $y_2(x) = x^2$. Variasjon av parametre sier at partikulærløsningen er på formen

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x),$$

hvor $u(x)$ og $v(x)$ tilfredstiller følgende to ligninger:

$$\begin{aligned} u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) &= 0 \\ u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) &= r(x) = 16x \ln x. \end{aligned}$$

Litt regning gir så at

$$u(x) = \frac{1}{3}x^4(1 - 4\ln x) \quad \text{og} \quad v(x) = \frac{16}{3}x(\ln x - 1).$$

Altså er $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) = x^3(4\ln x - 5)$. Dette gir at $x^2 y'' - 2y = 16x^3 \ln x$, $x > 0$, har generell løsning

$$y(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^2 + x^3(4\ln x - 5).$$

4 Bevegelsesligningen til det gitte masse-fjær systemet er gitt ved

$$y'' + 4y' + 4y = 2\cos 2t.$$

Tilhørende homogen ligning er gitt ved

$$(*) \qquad y'' + 4y' + 4y = 0,$$

som har karakteristisk ligning $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$. Altså har $(*)$ generell løsning gitt ved

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}.$$

For å finne den partikulære løsningen bruker vi ubestemte koeffisienters metode, der

$$y_p(t) = A\cos 2t + B\sin 2t.$$

Det gir

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= 2(-A\sin 2t + B\cos 2t) \\ y_p''(t) &= -4(A\cos 2t + B\sin 2t) = -4y_p(t), \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p' + 4y_p &= -4y_p + 4 \cdot 2(-A\sin 2t + B\cos 2t) + 4y_p \\ &= 8(-A\sin 2t + B\cos 2t) = 2\cos 2t, \end{aligned}$$

så $A = 0$ og $B = \frac{1}{4}$. Altså er funksjonen $y(t)$ som tilfredstiller den gitte bevegelsesligningen gitt ved

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + \frac{1}{4}\sin 2t.$$

Initialbetingelsen $y(0) = 0$ gir at $C_1 = 0$. Ettersom $y'(t) = (1-2t)C_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}\cos 2t$ gir initialbetingelsen $y'(0) = 0$ at $C_2 = -\frac{1}{2}$. Altså har initialverdiproblemet løsning

$$y(t) = \frac{1}{4}(\sin 2t - 2te^{-2t}).$$

For at vi skal få resonans må den ytre kraften ha samme frekvens som den naturlige. Dette inntreffer når $c = 0$. Bevegelsesligningen er da gitt ved

$$y'' + 4y = 2\cos 2t, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

som har løsning

$$y(t) = \frac{1}{2}t\sin 2t.$$

$\boxed{5}$ **a)** Totalmatrisen til ligningssystemet er gitt ved

$$[A \,|\, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & 6 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & -5 \\ -3 & 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Utfører så Gausseliminasjon på totalmatrisen:

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & 6 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & -5 \\ -3 & 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \xrightarrow{\text{SWAP}(R_1,R_2)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 6 & -5 \\ -2 & 6 & 4 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \\
&\xrightarrow{2R_1+R_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & 0 & 16 & -10 \\ -3 & 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \\
&\xrightarrow{3R_1+R_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & 0 & 16 & -10 \\ 0 & 3 & 0 & 18 & -15 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \\
&\xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & 0 & 16 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \\
&\xrightarrow{-6R_3+R_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \\
&\xrightarrow{-\frac{1}{20}R_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \\
&\xrightarrow{\text{SWAP}(R_2,R_3)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}
\end{aligned}$$

Altså er x_3 en fri variabel, mens x_1, x_2 og x_4 er ledende variabler. Sett $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Tilbakesubistitusjon gir så at

$$\begin{aligned}
x_4 &= -1 \\
x_3 &= t \\
x_2 &= -5 - 6x_4 = -5 + 6 = 1 \\
x_1 &= -5 + 2x_3 - 6x_4 = -5 + 2t + 6 = 1 + 2t.
\end{aligned}$$

Altså har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ løsning

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2t \\ 1 \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En basis for $\mathrm{Null}(A)$ er så gitt ved $\{(2, 0, 1, 0)\}$.

b) Fra oppgave **a)** har vi at A er radekvivalent med

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

så en basis for $\mathrm{Row}(A)$ er gitt ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ettersom x_1, x_2 og x_4 er ledende variabler er en basis til $\mathrm{Col}(A)$ gitt ved første, andre og fjerde søyle i A, det vil si

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Altså er $\mathrm{rang}(A) = 3$. Ettersom $\mathrm{Col}(A)$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$, og $\dim \mathrm{Col}(A) = 3$ må $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^3$. Derfor fins det *ingen* $\mathbf{c}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ikke har løsning.

c) Ettersom $\mathrm{Row}(A)^\perp = \mathrm{Null}(A)$, og $V = \mathrm{Row}(A)$, er $V^\perp = \mathrm{Null}(A)$. Fra oppgave **a)** har vi at $V^\perp$ har basis gitt ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

For å finne $\mathbf{y}_1$ i V og $\mathbf{y}_2$ i $V^\perp$, slik at

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 17 \end{bmatrix} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2,$$

ser vi først på den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y}$ inn i $V^\perp$, $\mathbf{y}_2$ for deretter å finne $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_2$.

La $\mathbf{v} = (2,0,1,0)$. Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y}$ inn i $V^{\perp}$ er gitt ved

$$\mathbf{y}_2 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{y}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{10+0+0+0}{4+0+1+0}\mathbf{v} = 2\mathbf{v} = (4,0,2,0).$$

Altså er $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_2 = (5,2,0,17) - (4,0,2,0) = (1,2,-2,17)$.

6 **a)** Finner egenverdiene til A:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1{,}1-\lambda & -0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7-\lambda \end{vmatrix} &= (1{,}1-\lambda)(0{,}7-\lambda) + 0{,}03 \\ &= 0{,}77 - 1{,}8\lambda + \lambda^2 + 0{,}03 = \lambda^2 - 1{,}8\lambda + 0{,}8 \\ &= (\lambda - 0{,}8)(\lambda - 1) = 0.\end{aligned}$$

Altså har A egenverdier $\lambda_1 = 0{,}8$ og $\lambda_2 = 1$. Finner så egenvektorene til A. Vi har at $(A - \lambda_1)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, hvor

$$A - \lambda_1 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & -0{,}3 \\ 0{,}1 & -0{,}1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

så $\mathbf{v}_1 = (1,1)$. Tilsvarende har vi at $(A - \lambda_2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, hvor

$$A - \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}3 \\ 0{,}1 & -0,3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

så $\mathbf{v}_2 = (3,1)$.
Altså er diagonalisering av A, $A = PDP^{-1}$, gitt ved

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Befolkningsmodellen for sau og ulv på Vargøy kan skrives på formen

$$\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}, \qquad \text{der } \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} S_n \\ U_n \end{bmatrix} \text{ og } A = \begin{bmatrix} 1{,}1 & -0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

I oppgave **a)** fant vi en diagonalisering for A, $A = PDP^{-1}$. Dette gir at

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_n &= A\mathbf{x}_{n-1} = A^2\mathbf{x}_{n-2} = \cdots = A^n\mathbf{x}_0 = PD^nP^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix} \frac{1}{1-3} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 102 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 - 48 \cdot 0{,}8^n \\ 50 - 48 \cdot 0{,}8^n \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Altså er $S_n = 150 - 48 \cdot 0{,}8^n$ og $U_n = 50 - 48 \cdot 0{,}8^n$, gitt at $S_0 = 102$ og $U_0 = 2$. Dette gir at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{150 - 48 \cdot 0{,}8^n}{50 - 48 \cdot 0{,}8^n} = 3.$$

7 Å vise at lineært avhengige vektorer gir likhet i Cauchy–Schwartz' ulikhet er enkelt: Hvis $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er lineært avhengige, så er $\mathbf{x} = k\mathbf{y}$ der k er en konstant. Dette gir at

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = |\langle k\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle| = |k| \cdot \|\mathbf{y}\|^2,$$

og

$$\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = \|k\mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = |k| \cdot \|\mathbf{y}\|^2.$$

Altså gir lineært avhengige vektorer likhet i Cauchy–Schwartz' ulikhet.

Anta $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ eller ekvivalent $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2 = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$. Dersom

$$\|\mathbf{x} - k\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 \left(k^2 - 2\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}k + \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{y}\|^2}\right) > 0$$

for alle $k \in \mathbb{R}$ har ikke andregradsligningen

$$k^2 - 2\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}k + \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} = 0$$

reell løsning. Altså er diskriminanten

$$4\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\right)^2 - 4\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} < 0.$$

Dette motstrider antagelsen $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2 = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$. Altså må antagelsen om at $\|\mathbf{x} - k\mathbf{y}\|^2 > 0$ for alle $k \in \mathbb{R}$ være feil, og vi har $\|\mathbf{x} - k\mathbf{y}\|^2 = 0$ for en k. Dette betyr at $\mathbf{x} - k\mathbf{y} = 0$, og derfor er $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ lineært avhengige.

Alternativ løsning: Anta så at $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$. Vi må vise at $\mathbf{x} = k\mathbf{y}$. For å gjøre det ser vi på

$$(*) \qquad \langle \mathbf{x} - k\mathbf{y}, \mathbf{x} - k\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - 2k\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + k^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 - 2k\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + k^2\|\mathbf{y}\|^2,$$

hvor vi har benyttet egenskapene til et indreprodukt (prikkproduktet i dette tilfellet), og hvor k er en konstant. La så

$$k = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2},$$

som innsatt i $(*)$ gir at

$$\langle \mathbf{x} - k\mathbf{y}, \mathbf{x} - k\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2}{\|\mathbf{y}\|^2} + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2}{\|\mathbf{y}\|^2} = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2}{\|\mathbf{y}\|^2}.$$

Setter vi inn for antagelsen om at $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$, får vi at

$$\langle \mathbf{x} - k\mathbf{y}, \mathbf{x} - k\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{0}$$

så $\|\mathbf{x} - k\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{0}$, det vil si $\mathbf{x} = k\mathbf{y}$.