Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I MATEMATIKK 3 (TMA4110)

Tirsdag 30. november 2004
Tid: 09:00 – 13:00
LØSNINGSFORSLAG MED KOMMENTARER

Oppgave 1 I denne oppgaven skal vi finne ei kubikkrot, og da må vi regne med komplekse tall på *polarform*. For tallet på høyre side blir dette:

$$1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\pi/3}. \tag{1}$$

Deretter skriver vi $z = re^{i\theta}$ og setter opp ligningen

$$z^3 = r^3e^{i3\theta} = 2e^{i\pi/3} = 2e^{i(\pi/3+2k\pi)}, \tag{2}$$

som har løsningene

$$\begin{aligned} r &= 2^{1/3}, \\ \theta_k &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right),\ k = \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots . \end{aligned} \tag{3}$$

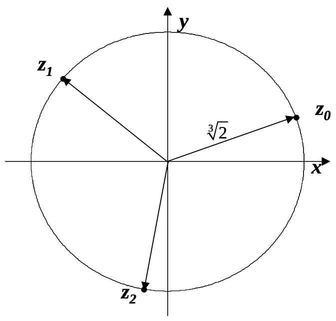
Vinkler som avviker med et multiplum av 2π gir samme komplekse tall, slik at vi kun får 3 ulike θ:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{9},\ \theta_1 = \frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3},\ \theta_2 = \frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}. \tag{4}$$

Dermed får vi løsningene

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{1/3}e^{i\pi/9}, \\ z_1 &= 2^{1/3}e^{i7\pi/9}, \\ z_2 &= 2^{1/3}e^{i13\pi/9}. \end{aligned} \tag{5}$$

Løsningene er skissert på figuren.



Figur 1: Løsningene i oppgave 1.

Oppgave 2 **(a)** Med karakteristisk ligning

$$\lambda^2 + 9 = 0 \tag{6}$$

blir røttene $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Her bruker vi Eulers formler for å omforme e^{3ix} til $\cos 3x + i \sin 3x$, og tilsvarende for e^{-3ix}. Dermed blir generell løsning

$$y_h(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x. \tag{7}$$

Initial- (start-) betingelsene gir oss to ligninger for c_1 og c_2:

$$\begin{aligned} y_h(0) &= 1 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0, \\ y_h'(0) &= 6 = -3c_1 \sin 0 + 3 \cos 0, \end{aligned} \tag{8}$$

med andre ord, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, og løsning

$$y(x) = \cos 3x + 2 \sin 3x. \tag{9}$$

(b) Venstre side er samme ligning som (a), slik at vi allerede kjenner homogenløsningen. Her kan vi ellers benytte at hvis høyresiden er en sum, kan partikulærløsningene finnes for hvert ledd i summen, og deretter summeres. Siden e^{3x} ikke er noen homogenløsning, vil partikulærløsningen ha formen Ae^{3x}. Innsatt får vi dermed

$$\left(Ae^{3x}\right)'' + 9Ae^{3x} = 18Ae^{3x} = 6e^{3x}, \tag{10}$$

slik at $A = 1/3$.

Når det gjelder $\sin 3x$, er dette en homogenløsning, og aktuell prøveløsning for y_p blir følgelig

$$x\left(A \sin 3x + B \cos 3x\right). \tag{11}$$

Innsatt:

$$[x(A\sin 3x + B\cos 3x)]'' + 9x(A\sin 3x + B\cos 3x) = \sin 3x, \tag{12}$$

$$6[A\cos 3x - B\sin 3x] = \sin 3x, \tag{13}$$

eller $A = 0$, $B = -\frac{1}{6}$. Dermed blir generell løsning

$$y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{6}x\cos 3x. \tag{14}$$

(c) Dette er en såkalt *Euler-Cauchy-ligning,* som behandles i K., avsnitt 2.6. Vi finner løsningen ved å prøve med $y = x^m$. Her blir dette

$$x^2(x^m)'' + 2x(x^m)' - 6(x^m) = x^m[m(m-1) + 2m - 6] = 0. \tag{15}$$

Med andre ord, vi må ha

$$m(m-1) + 2m - 6 = m^2 + m - 6 = 0, \tag{16}$$

eller $m_1 = -3$, $m_2 = 2$. Generell løsning blir da

$$y(t) = c_1 x^{-3} + c_2 x^2,\ x > 0. \tag{17}$$

Oppgave 3 **(a)** Vi stiller opp den utvidede koeffisientmatrisen og setter i gang:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Dette gir oss løsningen

$$x_5 = 1,\ x_4 = s,\ x_3 = t,\ x_2 = 1 + 2t - s,\ x_1 = -2 - 2t, \tag{21}$$

som også kan skrives

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t, s \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Legg merke til at løsningen er summen av en partikulærløsning, $\mathbf{x}_p$, og den generelle løsningen av homogenligningen, $\mathbf{x}_h$ (Det er strengt tatt ikke nødvendig å regne helt til redusert Echelon form. Løsningen blir den samme, - eller helt ekvivalent).

(b) Alle svar her lar seg utlede fra (a). For det første finner vi en basis for radrommet, $\text{Row}\,(A)$, fra de tre øverste radene i den reduserte Echelonformen (Det er mange ulike Echelonformer, men alle tilhørende basiser for $\text{Row}\,(A)$ er likeverdige). Deretter identifiserer vi de *ledende (pivot-) koeffisientene* for hver rad i Echelonformen, som vi finner i kolonnene 1, 2 og 5. Disse tre kolonnene i den *originale* matrisen kan brukes som basis for $\text{Col}\,(A)$. Dermed får vi

$$\text{Row}\,(A) = Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{Col}\,(A) = Span \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}. \tag{23}$$

(Det er også mange måter å finne en basis for $\text{Col}\,(A)$ på. For eksempel kunne en alternativt finne en basis for $\text{Row}\left(A^T\right)$!)

Tilslutt observerer vi at $\text{Row}\,(A)^\perp = \text{Null}\,(A)$, og basisen her følger direkte fra løsningen i (a):

$$\text{Row}\,(A)^\perp = \text{Null}\,(A) = Span \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \tag{24}$$

Vi ser videre at

$$\dim\left(\text{Row}\,(A)\right) = \dim\left(\text{Col}\,(A)\right) = \text{rang}\,(A) = 3, \tag{25}$$
$$\dim\left(\text{Null}\,(A)\right) = 2. \tag{26}$$

(I tråd med at $\text{rang}\,(A) + \dim\left(\text{Null}\,(A)\right) = n$).

Oppgave 4 **(a)** Vi starter med å løse karakteristisk ligning,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 4 \\ -4 & -\lambda & 4 \\ -4 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda\,(\lambda - 2)^2 = 0. \tag{27}$$

Dermed blir det 2 egenverdier, $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 2$ (dobbel).

Egenrommet til λ_1 finnes ved å løse $(A - 0I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi finner Echelonformen,

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

og ser umiddelbart at løsningen blir

$$\mathbf{v}_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

For λ_2 får vi på tilsvarende måte:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Her kan løsningen skrives

$$\mathbf{v}_2 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, t, s \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Merk at det også er flere ekvivalente måter å angi denne løsningen på. Vi leser mulige basisvektorer direkte ut fra løsningen.

(b) Matrisen i (a) har sammenfallende egenvektorer og det er dermed ikke helt opplagt A kan diagonaliseres. Her er imidlertid egenrommet til λ_2 to-dimensjonalt, så tilsammen har 3×3-matrisen A $1 + 2 = 3$ lineært uavhengige egenvektorer (basisene vi fant i (a)). Da *er* den diagonaliserbar med

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

For sikkerhets skyld kan vi sjekke at $AP = PD$:

$$AP = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Vi observerer at det oppgitte systemet nettopp er

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \tag{33}$$

der A er matrisen i (a), og generell løsning kan dermed settes opp umiddelbart:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}. \tag{34}$$

Med oppgitte startbetingelser får vi

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 - 2c_3 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}, \tag{35}$$

og ser umiddelbart at $c_3 = -1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0$. Løsningen blir dermed

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}. \tag{36}$$

Oppgave 5 **(a)** Vi finner først at konsentrasjonen av rotenon i vatn A er $y_1(t)/V$, mens konsentrasjonen i vatn B er $y_2(t)/(3V)$. Dermed kan vi sette opp at endringen i mengde pr. tidsenhet er lik det som kommer inn pr. tidsenhet, minus det som går ut pr. tidsenhet:

$$\frac{dy_1}{dt} = -U\left(\frac{y_1(t)}{V}\right), \tag{37}$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = +U\left(\frac{y_1(t)}{V}\right) - (6U)\left(\frac{y_2(t)}{3V}\right), \tag{38}$$

som blir lik de oppgitte ligningene. Ved $t = 0$ er det M kilo gift i A, dvs. $y_1(0) = M$, og ingenting i B, dvs. $y_2(0) = 0$.

(b) Her blir vi bedt om å løse ligningssystemet

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_1,\\ \dot{y}_2 &= y_1 - 2y_2,\end{aligned}$$

med startbetingelsene $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$.

Det er to måter å gjøre dette på. For det første kan vi løse det som et system, $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$, der

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Egenverdiene blir følgelig $\lambda = -1, -2$, og vi ser lett at tilhørende basisvektorer for egenrommene kan velges som

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Generell løsning blir dermed

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}, \tag{41}$$

og startbetingelsene gir umiddelbart at $c_1 = 1$, $c_2 = -1$. Følgelig blir

$$\begin{aligned}y_1(t) &= e^{-t},\\ y_2(t) &= e^{-t} - e^{-2t}.\end{aligned}$$

I dette enkle tilfellet er det imidlertid aller enklest å løse ligningene etter tur. Første ligning er jo bare

$$\dot{y}_1 = y_1,\ \ y_1(0) = 1, \tag{42}$$

og løsningen blir dermed som ovenfor $y_1(t) = e^{-t}$. I andre ligning får vi da $\dot{y}_2 = e^{-t} - 2y_2$, eller

$$\dot{y}_2 + 2y_2 = e^{-t},\ \ y_2(0) = 0. \tag{43}$$

Generell løsning er $y_2(t) = Ae^{-2t} + e^{-t}$, og siden $y_2(0) = 0$, blir $A = -1$.

Oppgave 6 Her kan være litt problematisk å komme i gang, men hvis vi beregner $A\mathbf{v}$, får vi nettopp

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{44}$$

som løser hele oppgaven for oss. Egenverdien er altså lik 4.