Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3
Bokmål
Onsdag 1. desember 2010
Kl. 9-13

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hver av de 12 punktene (1, 2a, 2b, 3a, 3b, 4, 5a, 5b, 5c, 6a, 6b, 7) teller likt ved sensuren.

Oppgave 1 Skriv det komplekse tallet $w = \frac{3-i}{2i-1}$ på polar form. Finn alle løsningene til ligningen $z^4 = w$ og tegn løsningene i det komplekse plan.

Vi har

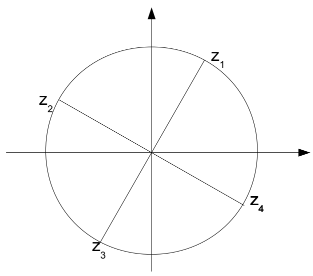
$$w = \frac{3-i}{2i-1} = \frac{(3-i)(-2i-1)}{(2i-1)(-2i-1)} = -1-i,$$

så $|w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $Arg(w) = -3\pi/4$. Dvs

$$w = \sqrt{2}(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)) = \sqrt{2}e^{-i3\pi/4}.$$

Løsningene av $z^4 = w$ blir da

$$z_k = 2^{1/8}\left(\cos(-3\pi/16 + k\pi/2) + i\sin(-3\pi/16 + k\pi/2)\right), \; k = 1,2,3,4.$$



Oppgave 2

a) Bevegelsen til et mekanisk system er gitt ved differensialligningen

$$y'' + 6y' + 18y = 0.$$

Bestem om bevegelsen er underdempet, overdempet eller om det er kritisk demping. Finn en partikulær løsning $y(t)$ som oppfyller initialbetingelsen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0.6$.

Karakteristisk ligning blir $\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0$ og $\lambda = -3 \pm 3i$. Systemet er underdempet (Kreyszyg, side 66). Generell løsning av differensialligningen blir $y(t) = e^{-3t}(A\cos 3t + B\sin 3t)$.

Initialbetingelsen $y(0) = 0, y'(0) = 0.6$ gir $A = 0$ og $B = 0.2$. Så partikulær løsningen som oppfyller disse kravene er $y(t) = 0.2e^{-3t}\sin 3t$.

b) Finn den stasjonære løsningen (the steady-state solution) til likningen

$$y'' + 6y' + 18y = 45\cos 3t.$$

Prøver $y_p(t) = C\cos 3t + D\sin 3t$, setter inn i ligningen og får

$$(9C + 18D)\cos 3t + (9D - 18C)\sin 3t = 45\cos 3t.$$

Dette gir $C = 1, D = 2$ og $y_p(t) = \cos 3t + 3\sin 3t$. Generell løsning blir $y(t) = e^{-3t}(A\cos 3t + B\sin 3t) + \cos 3t + 2\sin 3t$. Siden $e^{-3t}(A\cos 3t + B\sin 3t) \to 0$ når $t \to \infty$ blir den stasjonære løsningen $y(t) = \cos 3t + 2\sin 3t$. (Kreyszig, side 88)

Oppgave 3

a) Finn generell løsning til ligningen

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0, \;\; x > 0.$$

Dette er en Euler-Cauchy-ligning, så vi prøver $y(x) = x^m$. Det gir $m(m-1) - 4m + 6 = 0$, og $m = 2$ eller $m = 3$. Generell løsning blir $y(x) = Ax^2 + Bx^3$.

b) Finn en partikulær løsning til ligningen

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2e^x, \ x > 0.$$

Vi bruker variasjon av parametre. Vi har $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ og $r(x) = x^2e^x$. Wronskideterminanten blir $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = x^4$. Lagranges metode (Kreyszig side 98-101) gir da

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dr + y_2(x) \int \frac{y_1 r}{W} dr = -x^2 \int xe^x dx + x^3 \int e^x dx =$$

$$-x^2(xe^x - e^x) + x^3e^x = x^2e^x.$$

Så $y_p = x^2e^x$ er en partikulær løsning.

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vis at A er invertibel og finn A^{-1}.

Vi prøver å finne invers med bruk av Gauss-Jordan-eliminasjon.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Så får vi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5 La $V \subset R^4$ være løsningsrommet til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y - z + w &= 0 \\ x + 2y - 2z + w &= 0 \end{aligned}$$

a) Finn en ortogonal basis for V.

Matrisa til ligningssystemet er

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

etter Gauss-eliminasjon blir det

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Systemet blir $x_1 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0$, så

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En basis for V er $\{(0,1,1,0), (-1,0,0,1)\}$ som også er ortogonal. Sett $\mathbf{v}_1 = (0,1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,0,0,1)$.

b) Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b} = (1,1,1,1)$ inn i V.

Den ortogonale projeksjonen blir

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \frac{2}{2}(0,1,1,0) + \frac{0}{2}(-1,0,0,1) = (0,1,1,0).$$

c) Finn en ortogonal basis for R^4 der de to første basiselementene er de du fant i a).

Vi har $V = Null(A)$ så $V^\perp = Row(A) = Row(B)$ og $\mathbf{v}_3 = (1,0,0,1)$ og $\mathbf{v}_4 = (0,-1,1,0)$ gir en ortogonal basis for $V^\perp$; $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ er da ortogonal basis for R^4 som ønsket.

Oppgave 6 La

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -t & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Finn rangen av M for alle verdier av t.

Vi finner ved Gauss eliminasjon

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -t & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & t^2-1 & t(t+1) \end{bmatrix}$$

Rangen til M er dimensjon til $Row(M)$ som er lik antall ikke-null rader i siste matrisen. For $t = -1$ får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og $rang(M) = 3$.
For $t \neq -1$ deler vi siste rad på $t+1$ og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t \end{bmatrix}$$

Siste rad er ikke-null, dvs $rang(M) = 4$.
Konklusjon: $rang(M) = 3$ for $t = -1$ og $rang(M) = 4$ for $t \neq -1$.

b) For hvilke verdier av t finnes det en 5×4 matrise L slik at $ML = I$, hvor I er identitetsmatrisen? (Svaret skal begrunnes).

$ML = I$ betyr at det finnes vektorer l_1, l_2, l_3, l_4 in R^5 (kolonner til L) slik at

$$Ml_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ml_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ml_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ml_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det betyr at $Col(M) = R^4$. Dette er ekvivalent med at $rang(M) = 4$, svaret blir $t \neq -1$.

Oppgave 7 Ligningen

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$$

beskriver et kjeglesnitt i xy-planet. Finn et rotert koordinatsystem (x', y'), der ligningen på kjeglesnittet er på formen

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 1.$$

Hvilken type kjeglesnitt er det? Tegn de nye koordinataksene og kjeglesnittet i xy-planet.

Ligningen kan skrives som

$$[x,\ y]\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1.$$

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

har egenverdier $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 4$ ($\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2 - 1^2 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$) med tilhørende egenvektorer $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ og $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$. Så med $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ er $A = PDP^T$. Ligningen er ekvivalent med

$$[x,\ y]\, PDP^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1.$$

Så med $[x',\ y'] = [x,\ y]P$ fåes

$$2(x')^2 + 4(y')^2 = 1.$$

Dette er en ellipse med halvakser $1/\sqrt{2}$ og $1/2$.