Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag TMA4110 Matematikk 3, 10. august 2004

Oppgave 1

Sett $w = \sqrt{3} + i = re^{i\theta}$. Da er $r = \sqrt{3+1} = 2$, $\theta = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$. For $z^3 = w$ får vi da $z = \sqrt[3]{2}\, e^{(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})i}$, altså $z_0 = \sqrt[3]{2}\, e^{\frac{\pi}{18}i}$, $z_1 = \sqrt[3]{2} e^{\frac{13}{18}\pi i}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{\frac{25}{18}\pi i}$.

Oppgave 2

a) Differensiallikninga kan skrives som

$$(*) \qquad y' - \tfrac{1}{x+1} y = \tfrac{x}{x+1}.$$

Den har en integrerende faktor $\rho(x) = e^{-\int \frac{dx}{x+1}} = \frac{1}{x+1}$. Multiplikasjon av $(*)$ med $\rho(x)$ gir da

$$\left(\frac{1}{x+1} \cdot y\right)' = \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Integrasjon og multiplikasjon med $x+1$ gir så

$$\left(\frac{1}{x+1} y\right) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + C$$

$$\text{og} \quad y = (x+1)\ln(x+1) + 1 + C(x+1).$$

Av initialvilkåret $y(0) = 1$ får vi $C = 0$ og dermed

$$y = 1 + (x+1)\ln(x+1).$$

b) Eulers metode bruker formelen $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. Her er $h = \dfrac{1}{2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \dfrac{3}{2}$, $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x+1}$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx y_1$, $y(1) \approx y_2$, $y\left(\dfrac{3}{2}\right) \approx y_3$. Vi får

$$y_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$$

$$y_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{13}{6}$$
$$y_3 = \frac{13}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{13}{6}}{1 + 1} = \frac{71}{24} \approx 2.96.$$

Oppgave 3

a) Likninga $y'' - 2y' + 5y = 0$ har karakteristisk likning $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ med røttene $\lambda = 1 \pm 2i$. Generell løsning blir da
$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$
Initialkravet $y(0) = 0$ gir $C_1 = 0$. Dermed er $y' = C_2 e^x(\sin 2x + 2\cos 2x)$, og initialkravet $y'(0) = 1$ gir $2C_2 = 1$, altså $C_2 = \frac{1}{2}$. Løsningen blir $y = \dfrac{1}{2} e^x \sin 2x$.

b) Den homogene likninga $y'' + 2y' + y = 0$ har karakteristisk likning $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, og dermed generell løsning $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. Likninga $y'' + 2y' + y = \sin x$ har da en partikulær løsning på forma $y_p = A\cos x + B \sin x$. To ganger derivasjon og innsetting i likninga viser at $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Den generelle løsningen av $y'' + 2y' + y = \sin x$ blir altså $y = y_p + y_h = -\frac{1}{2}\cos x + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

c) To ganger derivasjon av $y = x^p$ og innsetting i $x^2 y'' - 2y' + 2y = 0$ viser at $y = x^p$ tilfredsstiller likninga dersom $p(p-1) - 2p + 2 = 0$, altså for $p = 2$ og for $p = 1$. De to løsningene $y_1 = x^2$ og $y_2 = x$ er lineært uavhengige siden kvotienten $\dfrac{y_1}{y_2}$ ikke er konstant.

Vi løser likninga $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x \ln x$ ved metoden med variasjon av parameteren. Metoden går ut på å bestemme to funksjoner u_1 og u_2 slik at
$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$$
$$y_1' u_1' + y_2' u_2' = (x \ln x) \cdot \frac{1}{x^2}$$
(merk at differensiallikninga må ordnes slik at y'' får koeffisient lik 1). Løsning er da $y_1 u_1 + y_2 u_2$. Vi får her
$$x^2 u_1' + x u_2' = 0$$
$$2x u_1 + u_2' = \frac{\ln x}{x}.$$
Dette gir $u_1' = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $u_2' = -\dfrac{\ln x}{x}$, som ved integrasjon gir $u_1 = -\dfrac{1}{x}(1 + \ln x) + C_1$, $u_2 = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C_2$. Generell løsning blir
$$y = -x(1 + \ln x) - \frac{1}{2} x (\ln x)^2 + C_1 x^2 + C_2 x.$$

Oppgave 4

a) Gauss-reduksjon av likningssystemet gir

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Vi setter $x_3 = s$, $x_4 = t$ og får $x_2 = x_3 = s$, $x_1 = -x_2 - x_4 = -s - t$. Løsningsvektorene kan altså skrives som

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

s og t vilkårlige tall.

b) Matrisa A er koeffisientmatrisa til likningssystemet i a), og er radekvivalent med matrisa $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Null (A) er løsningsrommet til likningssystemet, så en basis for Null (A) er $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

De ledende elementene finnes på plass (1,1) og (2,2). En basis for Row(A) er derfor $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, og en basis for Col($A$) er

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. Vi har at

$\mathrm{Col}(A)^\perp = [\mathrm{Row}(A^\top)]^\perp = \mathrm{Null}(A^\top)$. Gauss-reduksjon viser at $A^\top$ er radekvivalent med matrisa $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Da $A\vec{x} = \vec{0}$ er ekvivalent med $B\vec{x} = \vec{0}$, får vi løsningsvektoren $\vec{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, t vilkårlig.

En basis for $\mathrm{Col}(A)^\perp = \mathrm{Null}(A^\top)$ er da vektoren $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(Alternativ: Vi har at $\dim \operatorname{Col}(A) + \dim \operatorname{Col}(A)^{\perp} = 3$, slik at $\dim \operatorname{Col}(A)^{\perp} = 1$. $\operatorname{Col}(A)^{\perp}$ har derfor en basis bestående av *en* vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$. Vi skal ha $\vec{v} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$ og $\vec{v} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$. Dette gir $v_1 + 2v_2 + 2v_3 = 0$, $v_1 + v_2 + 2v_3 = 0$. Løser vi dette systemet finner vi $v_1 = -2v_3$, $v_2 = 0$, slik at f.eks. vektoren $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ danner en basis.)

Oppgave 5

a) Likningssystemet $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ kan skrives som

$A\vec{x} = \vec{0}$, med $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Gauss-reduksjon gir at A er ekvivalent med $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Systemet har derfor bare $\vec{x} = \vec{0}$ som løsning, og $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ er dermed lineært uavhengige.

b) Gram-Schmidt-algoritmen gir

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{7}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{7}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 6

a) Når $a = 1$ er $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ og dermed $\det A = 0$ siden A har (minst) to like rader.

Generelt har vi $\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{vmatrix}$

$= (a-1)\left\{ \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \right\} = (a-1)(a^2+a-2) = (a-1)^2(a+2)$. (Eller uten radoperasjon: $\det A = a^3 - 3a + 2$. Vi vet at $a - 1$ er en faktor, og ved divisjon får vi $a^3 - 3a + 2 = (a-1)(a^2 + a - 2)$.)

b) Egenverdiene til A er løsningene av $\det(A - \lambda I) = 0$, altså av $\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix}$.

Vi får fra punkt a) at determinanten er 0 når $a - \lambda = 1$ og når $a - \lambda = -2$, altså når $\lambda = \lambda_1 = a - 1$ og $\lambda = \lambda_2 = a + 2$.

Egenvektorene bestemmes av likningssystemet $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

For $\lambda = \lambda_1 = a - 1$ er $A - \lambda I$ radekvivalent med matrisa $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, så likningssystemet har løsningene $\vec{x} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

En basis for egenvektorene svarende til egenverdien $\lambda_1 = a-1$ er da f.eks. $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

For $\lambda = \lambda_2 = a+2$ er $A - \lambda I$ radekvivalent med matrisa $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, så likningssystemet har løsningene $\vec{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

En basis for egenvektorene svarende til egenverdien $\lambda_2 = a+2$ er da f.eks. vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Differensialligningssystemet kan skrives som $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, der $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

Innsetting av $\vec{y} = \vec{x}e^{\lambda t}$ med $\vec{x}$ konstant gir $\lambda\vec{x} = A\vec{x}$. Vi får da tre lineært uavhengige løsninger $\vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}$ og $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$. Generell løsning blir $\vec{y} = \left(C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{(a-1)t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(a+2)t}$, eller $y_1 = (-C_1 - C_2)e^{(a-1)}t + C_3 e^{(a+2)t}$, $y_2 = C_1 e^{(a-1)t} + C_3 e^{(a+2)t}$, $y_3 = C_2 e^{(a-1)t} + C_3 e^{(a+2)t}$.

Oppgave 7

Siden A og B er similære fins det en inverterbar matrise P slik at $P^{-1}AP = B$. Siden B og C er similære fins det en inverterbar matrise Q slik at$Q^{-1}BQ = C$. Vi har da at $C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$, siden $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$. Det fins altså en inverterbar matrise $R = PQ$ slik at $R^{-1}AR = C$, og det betyr at A og C er similære.