Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglige kontakter under eksamen:
Magnus Landstad: 735 91753
Hans Jakob Rivertz: 735 50287
Andrew Stacey: 735 90154

Bokmål versjon

TMA4115 Matematikk 3

7. juni 2010
Tid: 9:00
Hjelpemidler: Kode C
Enkel kalkulator: Citizen SR-270X eller Hewlett Packard HP30S
Rottman: Matematisk fomelsamling.

Alle svar med unntak av oppgave 5 skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1.

a) Vis at for alle komplekse tall z er $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$.

b) Løs likningen $z^2 - 2\,\mathrm{i}\, z - 1 - 2\,\mathrm{i} = 0$. Svaret skal skrives på formen $z = x + \mathrm{i}\, y$.

Oppgave 2.

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

b) Finn en generell løsning av differensiallikningen

$$y'' - 4y' + 3y = 3 - 4e^x.$$

Oppgave 3.

Finn en løsning av differensiallikningen $y'' - (3x^2 + 4x^{-1})y' + (3x + 4x^{-2})y = 0$ som er lineært uavhengig av løsningen $y = x$.

Oppgave 4.

Et underdempet legeme (med masse 1) har bevegelseslikning

$$y'' + cy' + ky = 0$$

To løsninger av denne differensiallikningen er

$$y_1 = e^{\lambda t}\cos(\omega t), \qquad y_2 = e^{\lambda t}\sin(\omega t)$$

a) Regn ut Wronskideterminanten $W(y_1, y_2)$ og finn en formel som bruker c og k i stedet for λ og ω.
Hint: Vis at $\lambda = -c/2$ og $\omega^2 = k - c^2/4$.

b) Anta at tiden mellom to påfølgende maksima er $2s$, og at maksimumsamplityden minker til $1/4$ av sin første verdi etter 15 svingninger. Bestem dempningskonstanten til systemet.

Oppgave 5.

Flervalgsoppgave, svar uten begrunnelse med ett alternativ på hvert spørsmål.

La A være en 4×3-matrise. Hva er Rank A? (Hvilken påstand er alltid riktig?)

A: høyst 3 B: 3 C: minst 3 D: 4

Hvilket av alternativene er minste kvadraters løsning $(\overline{x}, \overline{y})$ av likningssystemet

$$-x + y = 5, \ -x + 2y = 0, \ -3x + y = -5 \ ?$$

A: $(2, 3/2)$ B: $(1, 1)$ C: $(3/2, 3/2)$ D: $(2, 2)$

Oppgave 6.

Finn en basis for hvert av rommene Null(A), Col(A), Col$(A)^\perp$ og Row(A) til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & 2 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Finn den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på Col(A).

Oppgave 7.

La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Finn en matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^{-1}$. Kan P velges slik at $P^T = P^{-1}$?

c) Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \\ y_3' &= y_1 + 2y_3 \end{aligned}$$

med initialbetingelse $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = -2$.

Oppgave 8.

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vis at $A^2 = 0$ og at $I + A$ er invertibel.

b) La B være en $n \times n$-matrise slik at $B^2 = 0$. Vis at $I + B$ er invertibel. Er B diagonaliserbar?