



EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3

Bokmål

Onsdag 1. desember 2010

Kl. 9-13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)

Rottman: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hver av de 12 punktene (1, 2a, 2b, 3a, 3b, 4, 5a, 5b, 5c, 6a, 6b, 7) teller likt ved sensuren.

Oppgave 1 Skriv det komplekse tallet $w = \frac{3-i}{2i-1}$ på polar form. Finn alle løsningene til ligningen $z^4 = w$ og tegn løsningene i det komplekse plan.

Oppgave 2

a) Bevegelsen til et mekanisk system er gitt ved differensialligningen

$$y'' + 6y' + 18y = 0.$$

Bestem om bevegelsen er underdempet, overdempet eller om det er kritisk demping. Finn en partikulær løsning $y(t)$ som oppfyller initialbetingelsen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0.6$.

b) Finn den stasjonære løsningen (the steady-state solution) til likningen

$$y'' + 6y' + 18y = 45 \cos 3t.$$

Oppgave 3

a) Finn generell løsning til ligningen

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0, \quad x > 0.$$

b) Finn en partikulær løsning til ligningen

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2e^x, \quad x > 0.$$

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vis at A er invertibel og finn A^{-1} .

Oppgave 5 La $V \subset \mathbb{R}^4$ være løsningsrommet til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y - z + w &= 0 \\ x + 2y - 2z + w &= 0 \end{aligned}$$

- Finn en ortogonal basis for V .
- Finn den ortogonale projeksjonen av $b = (1, 1, 1, 1)$ inn i V .
- Finn en ortogonal basis for \mathbb{R}^4 der de to første basiselementene er de du fant i a).

Oppgave 6 La

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -t & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Finn rangen av M for alle verdier av t .
- For hvilke verdier av t finnes det en 5×4 matrise L slik at $ML = I$, hvor I er identitetsmatrisen? (Svaret skal begrunnes).

Oppgave 7 Ligningen

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$$

beskriver et kjeglesnitt i xy -planet. Finn et rotert koordinatsystem (x', y') , der ligningen på kjeglesnittet er på formen

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 1.$$

Hvilken type kjeglesnitt er det? Tegn de nye koordinataksene og kjeglesnittet i xy -planet.