Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Eugenia Malinnikova tlf. 47055678
Dag Wessel-Berg tlf. 92448828

EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3
Bokmål
Fredag 4. desember 2009
Kl. 9-13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 4. januar 2010

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hver av de 12 punktene (1, 2ab, 3ab, 4abc, 5, 6ab, 7) teller likt ved sensuren.

Oppgave 1 Finn alle løsningene til ligningen

$$z^5 = \frac{16\left(2\sqrt{3} - 1 - i(2 + \sqrt{3})\right)}{2 - i},$$

og tegn løsningene i det komplekse plan.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 6y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

b) Finn generell løsning til ligningen

$$y'' - 6y' + 25y = 20xe^{x}.$$

Oppgave 3

a) Finn en partikulær løsning til ligningen

$$x^2y'' + xy' - y = 4x, \ x > 0.$$

b) Ligningen

$$x^2y'' - (2x + x^2)y' + (2 + x)y = 0, \ x > 0,$$

har en løsning $y_1(x) = x$. Finn en annen løsning y_2 slik at y_1 og y_2 er lineært uavhengige. Regn ut Wronskideterminanten $W(y_1, y_2)$.

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 6 & -5 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for nullrommet Null(A) og en basis for radrommet Row(A).

b) Finn en basis for kolonnerommet (søylerommet) Col(A) og en basis for det ortogonale komplementet til Col(A), Col$(A)^{\perp}$.

c) Finn den ortogonale projeksjonen av

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

inn i Col(A).

Oppgave 5 La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Finn det(A) og løs det homogene ligningssystemet $A\mathbf{x} = 0$. Hva er rangen til A?

Oppgave 6

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{bmatrix}.$$

Finn egenverdiene til A og egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ slik at matrisen P med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er en ortogonal matrise med determinant 1.

b) Ligningen

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 - 40x - 30y = 0$$

beskriver et kjeglesnitt i xy-planet. Finn et rotert koordinatsystem (x', y'), der ligningen på kjeglesnittet er på formen

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + dx' + ey' = 0.$$

Hvilken type kjeglesnitt er det? Tegn de nye koordinataksene og kjeglesnittet i xy-planet.

Oppgave 7 La A være en symmetrisk matrise og la $\mathbf{x}$ være en egenvektor til A. Vis at dersom $\mathbf{y}$ er en vektor som er ortogonal til $\mathbf{x}$ (det vil si $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0$), så er vektoren $A\mathbf{y}$ også ortogonal til $\mathbf{x}$.