Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dag Wessel-Berg tlf. 924 48 828

EKSAMEN I TMA4110 MATEMATIKK 3

Bokmål
Torsdag 4. desember 2008
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S eller SR-270X) med tilhørende bruksanvisning.
Rottman: *Matematisk formelsamling.*

Sensur: 4. januar 2009

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hvert av de 12 punktene (1, 2abc, 3abc, 4, 5ab, 6, 7) teller likt ved sensuren.

Oppgave 1 Finn alle løsningene til ligningen

$$z^3 = \frac{5 + i2\sqrt{5}}{2 - i\sqrt{5}}$$

og skriv løsningene på formen $z = a + ib$. Bruk eksakte verdier for a og b. Tegn løsningene i det komplekse plan.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

b) Finn generell løsning til ligningen

$$y'' - y' - 2y = e^{-x}$$

c) Finn generell løsning til ligningen

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x, \quad x > 0$$

Oppgave 3

a) Finn alle løsninger på ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} + 2x_5 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \\ 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 + x_4 + 9x_5 &= 13 \end{aligned}$$

b) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Finn en basis for $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Row}(A)$ og $\mathrm{Null}(A)$.

c) Finn den ortogonale projeksjonen av

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

inn i $\mathrm{Col}(A)$.

Oppgave 4 Anta at vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige. Vis at vektorene

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

er lineært uavhengige.

Oppgave 5

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

La k være en konstant. Hva er egenverdiene og egenvektorene til kA?

b) Anta at hvert år skifter 30 % av eiere av biler med tohjulstrekk til bil med firehjulstrekk, mens 10 % av eierene av bil med firehjulstrekk skifter til bil med tohjulstrekk. Det totale antallet biler er konstant, og hver bileier har kun én bil. Dersom 25 % av bileierene har firehjulstrekk nå, hvor mange prosent av bileierene har firehjulstrekk om 10 år?

Oppgave 6 Ligningen

$$8x_1^2 + 12x_1x_2 + 17x_2^2 = 20$$

fremstiller et kjeglesnitt. Finn et nytt, rotert koordinatsystem slik at kjeglesnittet ligger i standard posisjon i forhold til det nye koordinatsystemet. Tegn kjeglesnittet og de nye aksene i x_1x_2 -planet. Hvilket kjeglesnitt er det?

Oppgave 7 Anta matrisen A har egenverdi λ med 1-dimensjonalt egenrom E_λ, og at matrisen B oppfyller $AB = BA$. Vis at om $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, så er $B\mathbf{x} = k\mathbf{x}$ for en konstant k (dvs. $\mathbf{x}$ er også en egenvektor for B).