Oppgave 1

a) Finn alle løsninger $z \in \mathbb{C}$ av ligningen

$$z^3 + z^2 + z = 1$$

Skisser løsningene (lag en tegning) i det komplekse planet. Skriv dem på formen $z = a+ib$ hvor a og b er reelle, og på formen $z = re^{it}$ hvor r og t er relle.

b) Skriv ned Eulers formel for e^{it} med $t \in \mathbb{R}$.

c) En **addisjonsformel** for en funksjon f er en formel som uttrykker $f(x+y)$ ved $f(x)$ og $f(y)$. Skriv ned en addisjonsformel for den komplekse eksponentialfunksjonen $f(z) = e^z$.

d) La $z = a + ib$ være et komplekst tall. Finn reelle tall p og q slik at z tilfredsstiller ligningene $z^2 + pz + q = 0$ og $\overline{z}^2 + p\overline{z} + q = 0$.

Løsning:

a) Vi skal finne røtter til

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

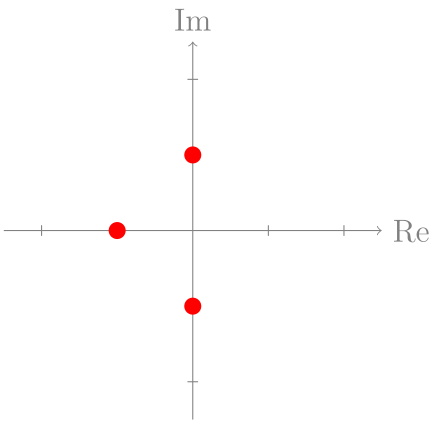
Vi tipper først på at $z = -1$ er en rot, som vi ved innputting ser stemmer;

$$(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0.$$

Polynomdivisjon gir oss at

$$z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)(z^2+1)$$

og dermed er røttene $z = -1 = e^{i\pi}$, $z = i = e^{i\pi/2}$ og $z = -i = e^{i3\pi/2}$.



b) $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

c) $f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x) \cdot f(y)$

d) Vi ser at polynomet

$$p(w) = (w - z)(w - \overline{z}) = w^2 - w(z + \overline{z}) + z\overline{z}$$

har z og $\overline{z}$ som røtter, og siden

$$z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a$$

og

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

begge er reelle, velger vi $p = z + \overline{z}$ og $q = z\overline{z}$.

Oppgave 2

a) Finn alle løsninger av ligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 63 \\ 51 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

b) Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og den korresponderende ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. For hvilke verdier av p er $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$? For hvilke verdier av q er $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$? Gi en basis for rommet

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p | A\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^q\}$$

av løsninger til den homogene ligningen.

Løsning:
a) Vi radreduserer totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 23 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 63 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 50 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{173}{20} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{47}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

og leser ut løsningen

$$\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{173}{20} \\ \frac{47}{10} \\ \frac{3}{4} \\ 5 \end{bmatrix}$$

b) A er en 4×7-matrise. En vektor er spesielt en matrise med størrelse $p \times 1$. For at produktet $A\mathbf{x}$ skal være definert så må $p = 7$. Videre vet vi at produktet av en $m \times p$-matrise og en $p \times n$-matrise gir en $m \times n$-matrise, så $\mathbf{y}$ er spesielt en 4×1-matrise. Altså $p = 7$ og $q = 4$.

Vi ser ar A allerede er på redusert trappeform, og oppgaven ber oss om en basis for nullrommet. La oss skrive opp den generelle løsningen på den homogene ligningen. Vi har pivot-element i andre,femte og sjette kolonne, de andre kolonnene tilhører frie variabler, altså får vi

$$\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basisen er dermed gitt ved

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Oppgave 3

a) Betrakt vektorene

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}99\\100\end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$. Vis at de utspenner $\mathbb{R}^2$. Er de lineært uavhengige? Begrunn svaret ditt.

b) Betrakt vektorene

$$\begin{bmatrix}1\\\vdots\\99\end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix}2\\\vdots\\100\end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^{99}$. Er de lineært uavhengige? Hva er dimensjonen til vektorenes lineære utspenn? Begrunn svarene dine!

c) Fullfør følgende definisjon "Vektorene $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ i et vektorrom V danner en **basis** til V dersom ..."

Løsning:

a) Vi påstår at

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

utspenner $\mathbb{R}^2$. Denne påstanden er ekvivalent med at for enhver vektor $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ kan vi alltid kan finne x og y slik at

$$x\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$$

eller skrevet om; at likningen

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$$

er løsbar. Siden matrisen

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$$

har determinant $-1 \neq 0$, har vi vist påstanden vår.

Observer at

$$-\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

så mengden

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}99\\100\end{bmatrix}$$

er lineært avhengig.

b) Vi ser om vi kan finne x og y slik at

$$x\begin{bmatrix}1\\\vdots\\99\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\\vdots\\100\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

Fra de to første koordinatene får vi likningene

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

som vi vet fra a) kun har den trivielle løsningen $x = 0$ og $y = 0$, så vektorene er lineært uavhengige. Siden vi har to lineært uavhengige vektorer, må vektorrommet de utspenner være to-dimensjonalt.

c) Vektorene $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ i et vektorrom V danner en **basis** til V dersom de er lineært uavhengige og utspenner V.

Oppgave 4 Anta at a, b, c og x, y, z er vilkårlige tall; du kan ikke velge spesifikke verdier!

a) Regn ut matriseproduktet

$$\begin{bmatrix}1 & a & 0 & 0\\0 & 1 & b & 0\\0 & 0 & 1 & c\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x & 0 & 0\\0 & 1 & y & 0\\0 & 0 & 1 & z\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c og x, y, z.

b) Hva er den inverse til matrisen

$$\begin{bmatrix}1 & a & 0 & 0\\0 & 1 & b & 0\\0 & 0 & 1 & c\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c?

c) Hva er determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c og x, y, z?

Løsning:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x+a & ay & 0 \\ 0 & 1 & y+b & bz \\ 0 & 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Her kan man lett gå i fellen og tenke at man kan bruke resultatet fra a), men da må man velge verdier for a, b, c, noe vi ikke har lov til. Dermed må vi bare bite i det sure eplet og radredusere

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b & bc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & ab & -abc \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b & bc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Så inversmatrisen er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & ab & -abc \\ 0 & 1 & -b & bc \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = cx \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = bcxy$$

Oppgave 5 Ifølge meteorolog Y_r eksisterer det et land N som er velsignet med mange ting, men ikke med solrikt vær. Det er aldri to dager med sol på rad. Dersom det er sol en dag, er det like stor sannsynlighet for at det regner som at det snør pafølgende dag. Dersom det er snø eller regn en dag, er det like stor sannsynlighet for a få det samme været - som å ikke få det samme været - påfølgende dag. Dersom det er en endring fra snø eller regn fra en dag til den neste, er det bare i halvparten av gangene sol påfølgende dag.

a) Hva er den stokastiske matrisen for denne markovkjeden?

b) Pa lang sikt, hvor mange dager - av alle (i %) - er det sol?

Løsning:

a) Vi organiserer informasjonen i en tabell

Dagen etter	Dagen før: Sol	Regn	Snø
Sol	0%	25%	25%
Regn	50%	50%	25%
Snø	50%	25%	50%

Som gir oss den stokastiske matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

b) Vi ser at

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.1875 & 0.1875 \\ 0.375 & 0.4375 & 0.375 \\ 0.375 & 0.375 & 0.4375 \end{bmatrix}$$

Så matrisen er regulær, og vi vet at langsiktig fordeling vil være gitt ved likevektsvektoren til matrisen. Vi finner egenvektor med egenverdi 1:

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & -0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenrommet til 1 er utspent av

$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og likevektsvektoren er da gitt ved

$$\frac{1}{2.5}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}.$$

Fra likevektsvektoren ser vi da at på lang sikt vil 20% ha sol.

Oppgave 6

a) La P være en kvadratisk matrise slik at $P^2 = P$. Vis at egenverdiene til P kan kun være 0 eller 1.

b) Gi et eksempel på en 2×2-matrise P slik at $P^2 = P$, og som har egenverdier 0 **og** 1.

c) Gi et eksempel på en 2×2-matrise P som har egenverdier 0 eller 1 eller begge, og som ikke tilfredstiller $P^2 = P$.

Løsning:

a) La $\mathbf{v}$ være en egenvektor med egenverdi λ til P. Da har vi

$$\lambda\mathbf{v} = P\mathbf{v} = P^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$$

og dermed

$$(\lambda - \lambda^2)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Egenvektorer er per definisjon ikke lik nullvektor, så da må $\lambda - \lambda^2 = 0$, og videre vet vi da at λ er enten 0 eller 1.

b) La oss prøve de enkleste matrisene vi kan tenke på.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Vi ser at vi for eksempel kan velge

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

c) Fra matrisene listet opp i b) ser vi at man kan velge enten

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Oppgave 7

a) La y_0, y_1, p og q være gitte reelle tall, og $f(t)$ en funksjon som er en million ganger deriverbar. Finnes det **alltid** en funksjon $y(t)$ som løser den inhomogene ligningen

$$y'' + py' + qy = f$$

med initialverdier $y(0) = y_0$ og $y'(0) = y_1$? Dersom det gjør det, gi en kort begrunnelse. Dersom det ikke gjør det, gi et eksempel på y_0, y_1, p, q og $f(t)$ der det ikke er noen løsning.

b) La

$$y(t) = t\sin(t).$$

Finn reelle tall p og q, og en reell funksjon $f(t)$, slik at y tilfredsstiller ligningen $y'' + py' + qy = f$. Du kan sjekke om svaret ditt er riktig: gjør det!

c) For p og q som i **b)**, gi et fundamentalt system av løsninger til den homogene ligningen $y'' + py' + qy = 0$.

Løsning:

a) Svaret er ja. Vi kan alltid finne to lineært uavhengige løsninger, $y_1(t)$ og $y_2(t)$, for den homogene likningen, og da har vi en analytisk formel for å finne partikulær løsning ut fra dem.

$$y_p(t) = y_2(t)\int \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt - y_1(t)\int \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}dt, \qquad \text{hvor } W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

b) Vi husker at hvis $f(t)$ er en løsning av den homogene likningen, så må vi ha en ekstra t på tippet av partikulær løsning. Vi skal finne likning $y'' + py' + qy = f$ slik at $y(t)$ er en partikulær løsning. Dermed prøver vi en andre ordens diffligning som har $\sin(t)$ som en homogen løsning. Vi vet at hvis det karakteristiske polynomet $\lambda^2 + p\lambda + q$ har komplekse røtter $\lambda = a \pm ib$, så er den generelle homogene løsningen gitt ved

$$y_h(t) = e^{at}[c_1\cos(bt) + c_2\sin(bt)]$$

Altså må $a = 0$ og $b = 1$ for at $\sin(t)$ skal være en homogen løsning, og likheten

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = a \pm ib$$

gir oss $p = 0, q = 1$, i.e. $y'' + y = 0$ er den homogene likningen.

Setter vi nå inn for $y(t) = t\sin(t)$, får vi

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= (t\sin(t)) + t\sin(t) \\ &= (\sin(t) + t\cos(t))' + t\sin(t) \\ &= 2\cos(t) - t\sin(t) + t\sin(t) \\ &= 2\cos(t) \end{aligned}$$

Altså konkluderer vi med at likningen vi er på utkikk etter er

$$y'' + y = 2\cos(t)$$

c) Fra diskusjonen i **b)** vet vi at et fundamentalt system av løsninger er gitt ved

$$y_1(t) = \cos(t) \text{ og } y_2(t) = \sin(t)$$

Oppgave 8 La λ og μ være gitte reelle tall hvor $\lambda \neq \mu \neq 0$, og betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \mu \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for rommet av løsninger $y(t)$ til den homogene ligningen

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

b) Finn en løsning til den homogene ligningen $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ som tilfredstiller initialbetingelsen

$$y'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løsning:

a) Vi finner egenverdier

$$\begin{aligned}
\det(A - tI) &= \begin{vmatrix} \lambda - t & \mu & 0 \\ \mu & \lambda - t & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \mu - t \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - \mu - t) \begin{vmatrix} \lambda - t & \mu \\ & \lambda - t \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - \mu - t)[(\lambda - t)^2 - \mu^2] \\
&= (\lambda - \mu - t)[(\lambda - t) - \mu][(\lambda - t) + \mu] \\
&= [(\lambda - \mu) - t][(\lambda + \mu) - t]
\end{aligned}$$

Egenverdier $\lambda - mu$ og $\lambda + \mu$ med algebraisk multiplisitet henholdsvis 2 og 1. Vi finner så egenrom

$$E_{\lambda-\mu} = \mathrm{Null}(A - (\lambda - \mu)I_3) = \mathrm{Null} \begin{bmatrix} \mu & \mu & 0 \\ \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$E_{\lambda+\mu} = \mathrm{Null}(A - (\lambda + \mu)I_3) = \mathrm{Null} \begin{vmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -2\mu \end{vmatrix} = \mathrm{Span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Så en basis for rommet av løsninger er gitt ved

$$y_1(t) = e^{(\lambda-\mu)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_2(t) = e^{(\lambda-\mu)t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og } y_3(t) = e^{(\lambda+\mu)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Den generelle løsningen er gitt ved

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t).$$

Vi deriverer og setter inn initialkravene og får

$$(\lambda - \mu)c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\lambda - \mu)c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (\lambda + \mu)c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vi ser med en gang at $c_2 = 0$, så vi står igjen med likningene

$$(\lambda - \mu)c_1 + (\lambda + \mu)c_3 = 0$$

og

$$-(\lambda - \mu)c_1 + (\lambda + \mu)c_3 = 0$$

legger vi sammen disse får vi

$$(\lambda - \mu)c_3 = 0 \implies c_3 = 0$$

og da også $c_1 = 0$. Det er kun den trivielle løsningen som tilfredstiller initialkravet.

Oppgave 9

a) Finn koeffisientene a, b og c til det kvadratiske polynomet $f(z) = az^2 + bz + c$ som gir best tilpasning til følgende fem datapunkter.

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) Gi et eksempel på en matrise A slik at minste kvadraters 'løsning' av ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ **ikke** er unik/entydig?. Begrunn påstandene dine!

c) For en kvadratisk matrise A, la A^T betegne dens transponerte. Vis at $\text{Col}(A) = \text{Col}(AA^T)$.

Løsning:

a) Vi starter med å sette opp likningene vi får fra

$$\begin{bmatrix} z \\ f(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

altså

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ c = 1 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = \frac{1}{2} \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

Disse likningene gir totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Hvis vi radreduserer denne får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

altså har vi en eksakt løsning $f(z) = -z + 1$. Vi kunne eventuelt tenkt vi skulle løs dette med minste kvadraters metode;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 4 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{289}{16} & \frac{65}{8} & \frac{25}{4} \\ \frac{65}{8} & \frac{25}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{25}{4} & \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 4 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{8} \\ -\frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{289}{16} & \frac{65}{8} & \frac{25}{4} & -\frac{15}{8} \\ \frac{65}{8} & \frac{25}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{15}{4} \\ \frac{25}{4} & \frac{5}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Vi får samme løsning, men med mye styggere mellomregning. Lærdom er å ikke hoppe rett til minste kvadrater.

b Hvis A har ett ikke-trivielt nullrom, så vil vi ha uendelig med minste kvadraters løsninger. La oss ta eksempelet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Her ser vi at vi ikke kan finne en eksakt løsning siden vi får $0 = 1$ i nederste linje. Med minste kvadrater får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

altså

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi reduserer totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som gir oss generell løsning

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Som forventet ser vi at siste delen av den generelle løsningen utspenner nullrommet til vår originale matrise.

c) Siden kolonnene i AA^T bare er lineærkombinasjoner av kolonnene i A har vi at $\mathrm{Col}(AA^T) \subseteq \mathrm{Col}(A)$. Klarer vi nå å vise at dimensjonen til $\mathrm{Col}(AA^T)$ er større eller lik dimensjonen til $\mathrm{Col}(AA^T)$ må vi ha likhet. Dette er ekvivalent med at rangen til AA^T er større eller lik A, og ved Rang-nullitet teoremet vet vi at dette er det samme som at dimensjonen til nullrommet av A er større eller lik dimensjonen til nullrommet av AA^T. La oss dermed vise at enhver vektor i nullrommet til AA^T også ligger i A.

$$AA^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}AA^T\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = 0$$

Observer at $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ er en kolonnevektor, så $(\mathbf{x}^T A^T)(\mathbf{x}^T A^T)^T = \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = 0$, og ved positivitetskravet til indreprodukt vet vi at dette kan kun stemme hvis $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, altså $\mathbf{0} = \mathbf{y} = A\mathbf{x}$, og vi er i mål.

Oppgave 10

a) La $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være den ortogonale projeksjonen på diagonalen

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y \right\}$$

Hvilken matrise beskriver denne lineærtransformasjonen?
Hva er egenverdiene og egenvektorene?
Sjekk at de numeriske svarene dine stemmer overens med geometrien!

b) La $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$, og la $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + \ldots + v_n\mathbf{b}_n$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Vis at

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_k\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\|$$

for alle $k = 1, \ldots, n$, hvor $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{w}$ er indreproduktet.

c) Hva er en spektral-dekomposisjon til en symmetrisk matrise med reelle koeffisienter? Skriv ned en formel, og forklar!

Løsning:

a) Vi finner standardmatrisen A ved

$$A = \left[P\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad P\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right]$$

P projiserer ned på linjen utspent av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, så vi har at

$$P\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]}{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix}$$

og

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Vi finner egenverdiene til A:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1/2)^2 - 1/4 = \lambda(\lambda - 1)$$

Så egenverdiene er 0 og 1, egenvektorene er gitt ved

$$E_0 = \text{Null} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$E_1 = \text{Null} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Altså har vi at egenvektorene til 0 er utspent av $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og egenvektorene til 1 er utspent av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dette stemmer bra med geometrien siden alt som allerede ligger på diagonalen ikke bør sendes noe til noe annet sted, og alt som står ortogonalt på linjen må bli sendt til origo.

b) Husk at $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ er en ortogonal basis, så

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_k \rangle &= \langle v_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + v_n \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_k \rangle \\ &= \langle v_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_k \rangle + \langle v_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_k \rangle + \cdots + \langle v_k \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_k \rangle + \cdots + \langle v_n \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_k \rangle \\ &= v_k \langle \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_k \rangle = v_k \end{aligned}$$

Vi får nå

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{v}, v_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + v_n \mathbf{b}_n \rangle \\ &= v_1 \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle + v_2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \rangle + \cdots + v_n \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_n \rangle. \\ &= v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \end{aligned}$$

Setter vi sammen alt dette får vi da

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \geq \sqrt{v_k^2} = |v_k| = |\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_k \rangle|$$

som var det vi skulle vise.

c) Når vi har en symmetrisk $n \times n$-matrise A med reelle koeffisienter, vet vi at den er ortogonalt diagonaliserbar. Det vil si at det finnes en ortogonal matrise Q og diagonal matrise D slik at $A = QDQ^{-1}$.