Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4110
Matematikk 3
Høst 2010

Øving 11 – Veiledning uke 45

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.2

ORTOGONAL PROJEKSJON Finn punktet **p** på linjen utspent av **a** som er nærmest **b**.

3 $\mathbf{a} = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (4, -3, 5, 3)$.

MINSTE KVADRATERS LØSNING Finn minste-kvadraters løsning $\overline{\mathbf{x}}$ av hvert oppgitte system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Finn også den ortogonale projeksjonen **p** av **b** på kolonnerommet til A.

13
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 \qquad\quad - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 \qquad\quad &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

La V være løsningsrommet for det oppgitte homogene lineære ligningssystemet. Finn først en basis for V, og finn deretter den ortogonale projeksjonen **p** av **b** på V.

21 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;
$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$; $\mathbf{b} = (11, 11, 0, 22)$.

25 La A være en $m \times n$-matrise, og anta at A har rang n og at vektoren **b** er ortogonal til kolonnerommet til A. Vis at minste-kvadraters løsningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.4

GRAM-SCHMIDT ORTOGONALISERINGSALGORITME En basis $\{\mathbf{v}_i\}$ for et underrom V av $\mathbb{R}^n$ er oppgitt. Bruk Gram-Schmidts ortogonaliseringsalgoritme for å omforme den oppgitte basisen til en ortogonal basis $\{\mathbf{u}_i\}$ for V. Dersom en vektor **b** er oppgitt, bruk den ortogonale basisen for å finne den ortogonale projeksjonen **p** av **b** på V.

2 $\mathbf{v}_1 = (3, 5)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 7)$.

11 $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 1)$,
$\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1, 1)$; $\mathbf{b} = (7, 0, 7, 0)$.

25 La $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ være en ortonormal basis for et underrom U av $\mathbb{R}^m$, og anta at

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n$$

og

$$\mathbf{w} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \ldots + b_n\mathbf{u}_n$$

Vis at da er

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

og dermed at

$$|\mathbf{v}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

Disse formelene viser at en ortonormal basis for et vektorrom har egenskaper lignende standardbasisen for $\mathbb{R}^n$ (bestående av enhetsvektorene $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$).

Eksamensoppgaver

A-40 **a)** Bruk Gram-Schmidts ortogonaliseringsalgoritme til å finne en ortogonal basis for underrommet $V \subseteq \mathbb{R}^4$ utspent av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Finn (den ortogonale) projeksjonen av $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ ned på underrommet V.

Des. 07, oppg. 6 **a)** Finn en basis for løsningsrommet til det homogene systemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 \phantom{{}+2x_4} &= 0 \\ x_1 \phantom{{}-2x_2} - x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

b) Bestem den ortogonale projeksjonen av vektoren $(1, 2, -3, 1)$ inn i underrommet $V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ i $\mathbb{R}^4$ der $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonale vektorer gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1, 0), \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1, 2)$$

c) Finn også vektorer $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$.

Flervalgsoppgaver

1 La A være en 4×3-matrise. Hva er rank A?

A: høyst 3 **B:** 3 **C:** minst 3 **D:** 4

Hvilket av alternativene er minste kvadraters løsning $(\overline{x}, \overline{y})$ av ligningssystemet

$$-x + y = 5, \quad -x + 2y = 0, \quad -3x + y = -5?$$

A: $(2, 3/2)$ **B:** $(1, 1)$ **C:** $(3/2, 3/2)$ **D:** $(2, 2)$

Fasit

EP 5.2

3. $(4, 0, 4, 4)$

13. $\overline{\mathbf{x}} = 1/4(7, 6, 3)$; $\mathbf{p} = 1/4(1, 11, 1, 3)$

21. $(-2, 1, 0, 1)$, $(0, -1, 1, 0)$; $\mathbf{p} = (-2, 6, -5, 1)$.

EP 5.4

11. $(1, 1, 0, 1)$, $(1, -2, 3, 1)$ og $(-4, 3, 3, 1)$; $\mathbf{p} = (5, -2, 5, 4)$.