TMA4110
Matematikk 3
Høst 2010

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 11

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.2

3 Vi gjør slik det er beskrevet i eksempel 2 side 224. Vi har $\mathbf{p} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\right)\mathbf{a}$, og

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (1,0,1,1)\cdot(4,-3,5,3) = 12,\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} &= |\mathbf{a}|^2 = 1^2+0^2+1^2+1^2 = 3.\end{aligned}$$

Følgelig er $\mathbf{p} = 4\mathbf{a} = (4,0,4,4)$.

13 Vi bruker definisjonen på side 226 (jf. eksempel 3 på samme side). Her har vi $\mathbf{b} = (0,3,0,0)$ og

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0\\ -3 & 6 & -5\\ 0 & -5 & 6\end{bmatrix}.$$

I tillegg får vi at $A^T\mathbf{b} = (6,0,-3)$. Normalsystemet $A^TA\bar{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ som vi må løse, er da

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0\\ -3 & 6 & -5\\ 0 & -5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\\ 0\\ -3\end{bmatrix}.$$

Vi får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 0 & 6\\ -3 & 6 & -5 & 0\\ 0 & -5 & 6 & -3\end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 9 & -10 & 6\\ 0 & 0 & 4 & 3\end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss–Jordan}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7/4\\ 0 & 1 & 0 & 3/2\\ 0 & 0 & 1 & 3/4\end{array}\right].$$

Følgelig er minste kvadraters løsning gitt ved

$$\bar{\mathbf{x}} = \left(\frac{7}{4},\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}(7,6,3),$$

og den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i $V = \mathrm{Col}(A)$ er

$$\mathbf{p} = A\bar{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{4},\frac{11}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}(1,11,1,3).$$

21 Vi begynner med å løse det oppgitte homogene systemet; vi har at

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

og tilbakesubstitusjon, med $x_4 = s$, $x_3 = t$, gir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s\\ -t+s\\ t\\ s\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0\\ -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

så $\{(-2,1,0,1),(0,-1,1,0)\}$ er en basis for løsningsrommet V. Vi ønsker nå å finne den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b} = (11,11,0,22)$ inn i V. Vi lar A være matrisen som har basisvektorene for V som kolonner; dermed er $V = \mathrm{Col}(A)$ og den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b}$ inn i V er gitt ved $\mathbf{p} = A\overline{\mathbf{x}}$, der $\overline{\mathbf{x}}$ tilfredstiller

$$A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$$

Utregninger gir

$$A^T A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

og

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Systemet $A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ kan nå løses på vanlig måte (Gausseliminasjon og tilbakesubstitusjon), som leder til $\overline{\mathbf{x}} = (1,-5)$. Da er

$$\mathbf{p} = A\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{25}$ Vi ser på normalsystemet $A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Siden $m \times n$ matrisen A har rang n, er $n \times n$ matrisen $A^T A$ inverterbar (teorem 2 side 227). Følgelig har normalsystemet en entydig løsning, gitt ved $\overline{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}$.

La $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ være kolonnene til A. Siden $\mathbf{b}$ er ortogonal med kolonnerommet til A, vet vi at $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b} = 0$ for $i = 1, \ldots n$, og dermed at

$$A^T\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]^T\,\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er følgelig $\overline{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.4

$\boxed{2}$ Vi skal bruke Gram-Schmidts ortogonalitetsalgoritme på basisen $\mathbf{v}_1 = (3,5)$, $\mathbf{v}_2 = (4,7)$ for $V = \mathbb{R}^2$. Vi får

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \tfrac{47}{34}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{34}\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi kan droppe den skalare faktoren $1/34$ og får en (brøkfri) ortogonal basis

$$\mathbf{u}_1 = (3,5), \quad \mathbf{u}_2 = (-5,3).$$

$\boxed{11}$ Vi skal bruke Gram-Schmidts ortogonalitetsalgoritme på en basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for et underrom V i $\mathbb{R}^4$. Her er

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,0,1), \quad \mathbf{v}_2 = (1,0,1,1), \quad \mathbf{v}_3 = (0,1,1,1),$$

og vi får

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi dropper den skalare faktoren $1/3$ (multipliserer $\widetilde{\mathbf{u}}_2$ med 3) og bruker $\mathbf{u}_2 = (1, -2, 3, 1)$ i regningen videre:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_3 &= \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \right) \mathbf{u}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{15} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi dropper den skalare faktoren $1/5$ (setter $\mathbf{u}_3 = 5\widetilde{\mathbf{u}}_3$) og får en ortogonal basis (uten brøker) for V:

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,0,1), \quad \mathbf{u}_2 = (1,-2,3,1), \quad \mathbf{u}_3 = (-4,3,3,1).$$

Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b} = (7,0,7,0)$ inn i V er da, ifølge projeksjonsformelen (EP5.4, Teorem 1), gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1 + \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \right) \mathbf{u}_2 + \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3} \right) \mathbf{u}_3 \\ &= \frac{7}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{28}{15} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-7}{35} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{25}$ Husk at $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ er innbyrdes ortonormale hvis og bare hvis

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

Vi har oppgitt vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ gitt ved

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + a_n \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{w} = b_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + b_n \mathbf{u}_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{u}_j,$$

der U er et underrom av $\mathbb{R}^m$ (av dimensjon n). Vi skal regne ut $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$; vi bruker ortonormalitet av basisvektorene og distributivitet, symmetri og homogenitet (se side 211, avsnitt 5.1) av prikkproduktet på $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{u}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_i \mathbf{u}_i) \cdot (b_j \mathbf{u}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\end{aligned}$$

Dette viser resultatet (formelen for $|\mathbf{v}|^2$ fremkommer ved å sette $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, siden $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$).

Eksamensoppgaver

A-40 **a)** $u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$u_2 = v_2 - \left(\frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u_3 = v_3 - \left(\frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1 - \left(\frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}\right) u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ortogonal basis for V : $\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix},}$ (f.eks.).

b)
$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_V b &= \left(\frac{b \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1 + \left(\frac{b \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}\right) u_2 + \left(\frac{b \cdot u_3}{u_3 \cdot u_3}\right) u_3 \\ &= \tfrac{9}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tfrac{30}{30}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}.\end{aligned}$$

Des. 07, oppg. 6 **a)** Vi kan løse ligningssystemet ved Gauss-Jordaneliminasjon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(\frac{1}{2})R_2]{(1)R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Med $x_3 = s$ og $x_4 = t$ får vi $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s - 2t, s - t, s, t) = s(1, 1, 1, 0) + t(-2, -1, 0, 1)$. En basis for løsningsrommet er følgelig vektorene $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0)$ og $\mathbf{u}_2 = (-2, -1, 0, 1)$.

b) Vi skal finne den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b} = (1, 2, -3, 1)$ inn i underrommet $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Siden $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1, 2)$ er ortogonale, får vi

$$\mathbf{p} = \left(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 = -\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\-2\\2\end{bmatrix}$$

c) Vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er radene i koeffisientmatrisen A til ligningssystemet i **a)**. Følgelig må $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ være i det ortogonale komplementet $\text{Row}(A)^\perp$. Siden $\text{Row}(A)^\perp = \text{Null}(A)$, kan vi finne $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ ved å bruke Gram-Schmidts ortogonaliseringsalgoritme på basisen $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0)$ og $\mathbf{u}_2 = (-2, -1, 0, 1)$ for $\text{Null}(A)$:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0), \qquad \mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_3}\right)\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Vektorene $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_4 = (-1, 0, 1, 1)$ er følgelig en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$.

Flervalgsoppgaver

$\boxed{1}$ På den første delen, er svaralternativ **A** riktig fordi en 4×3-matrise kan kun ha rang 0, 1, 2 eller 3 (av samme grunn er **B**, **C** og **D** feil).

For den andre delen, er svaralternativ **D** riktig.
Systemet kan skrives $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med koeffisientmatrise

$$A = \begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix}$$

og $\mathbf{b} = (5, 0, -5)$. Normalsystemet er $A^TA\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi har

$$A^TA = \begin{bmatrix}-1 & -1 & -3\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11 & -6\\-6 & 6\end{bmatrix}$$

og

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix}-1 & -1 & -3\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan eliminasjon av normalsystemet gir

$$\begin{bmatrix}11 & -6 & 10\\-6 & 6 & 0\end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Dermed er $\overline{x} = 2$ og $\overline{y} = 2$, så alternativ **D** er korrekt.