Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 10

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.4

7 Som beskrevet i Algoritme 1 og 2 i EP, kapittel 4.4 på sidene 190 og 193, kan vi finne en basis for rad- og kolonnerommet til A ved først å foreta Gauss (-Jordan) eliminasjon, og deretter plukke ut de vektorene algoritemene tilsier. Vi får

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 16 \\ 1 & 3 & 3 & 13 \\ 2 & 5 & 4 & 23 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -3 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Altså er en basis for radrommet $(1, 0, -3, 4)$ og $(0, 1, 2, 3)$, og for kolonnerommet $(1, 1, 1, 2)$ og $(1, 4, 3, 5)$.

17 Vi skal finne en basis T for $\mathbb{R}^3$ som inneholder $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2)$ og $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 3)$. La A være matrisen med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og vektorene i standardbasisen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$. Da er $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Col}\,(A)$, og vi kan bruke Algoritme 2 (Basis for kolonnerommet, EP 4.4 side 193) som i eksempel 5, side 194:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Når vi reduserer til echelonform får vi

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi har ledende enere i kolonne 1, 2 og 4 i E. Disse tilsvarer vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{e}_2$ i A. En basis for $\mathbb{R}^3$ som inneholder $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ vil da være

$$T = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2\} = \{(1, 2, 2), (2, 3, 3), (0, 1, 0)\}.$$

19 Vi har gitt en basis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ for et underromm av $\mathbf{R}^4$. Vi bestemme en basis som inneholder S men som også spenner ut hele $\mathbf{R}^4$, ved å bruke samme metode som i oppgave 4.4.15. Nærmere bestemt kan vi danne matrisen

$$A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og finne 4 lineært uavhengige vektorer (blant $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$) ved å redusere A til trappeform og plukke de tilhørende kolonnevektorene.

Dette gir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 \end{bmatrix}$$

og vi ser at vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ danner en basis for $\mathbf{R}^4$.

23 Les innledningen til kapittel 4.4 for å få tak i begrepet "irredundant". Ut fra teorien i 4.4 kan vi da karakterisere irredundante ligninger slik det er gjort i innledningen til oppgaven.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -4 \\ 0 & 6 & 6 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Et irredundant system består derfor av ligningene 1, 2 og 4 i det gitte systemet.

30 La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ være kolonnevektorene (søylevektorene) til den gitte $m \times n$-matrisen A. Da er altså $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, og ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan skrives

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

For en gitt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vil følgelig ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha løsning hvis og bare hvis $\mathbf{b} \in \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \operatorname{Col}(A)$. Vi har $\dim \operatorname{Col}(A) \le n$. Da $n < m$, er $\operatorname{Col}(A)$ et ekte underrom av $\mathbb{R}^m$. Det finnes derfor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ som ikke er i $\operatorname{Col}(A)$. For slike $\mathbf{b}$ har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ingen løsning.
Alternativ løsning: Siden $n < m$, vil echelonformen E til A ha minst èn nullrad. Dette betyr at systemet $E\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der $\mathbf{b} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, er inkonsistent. Vi kan skrive $E = BA$ (der B er et produkt av elementære matriser). Siden B er invertibel (enhver elementær matrise er invertibel, og dermed er også ethvert produkt av slike invertibelt; se side 50-51 i E&P), har vi $A = B^{-1}E$ og det følger at systemet $A\mathbf{x} = B^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}'$ er inkonsistent (dersom det har løsning, så har også $E\mathbf{x} = BA\mathbf{x} = BB^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}$ løsning, men dette er en selvmotsigelse, siden vi valgte $\mathbf{b}$ nettopp slik at $E\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har løsning).

Med andre ord, vi finner først en $\mathbf{b}$ slik at $E\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har løsning (noe vi kan få til, ettersom E har minst èn nullrad), og utfører elementære radoperasjoner på den utvidede koeffisientmatrisen $[E \,|\, \mathbf{b}]$ til vi har oppnådd A i venstre kolonne (dette svarer til å utføre inversen til hver radoperasjon som ble brukt for å bringe A over til E, men i motsatt rekkefølge). Vi står da igjen med et inkonsistent system $[A \,|\, \mathbf{b}'] = [B^{-1}E \,|\, B^{-1}\mathbf{b}]$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.1

$\boxed{3}$ Av definisjonen i formel (1) får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= 15 - 10 - 4 - 1 = 0, \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 &= 15 + 0 - 32 + 17 = 0, \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 &= 9 + 0 + 8 - 17 = 0. \end{aligned}$$

Vektorene er altså innbyrdes ortogonale.

$\boxed{19}$ Vi kan gjøre som i eksempel 4, EP side 218. La A ha $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$ som rader, dvs

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Da er $V = \mathrm{Row}(A)$ og $V^\perp = \mathrm{Row}(A)^\perp = \mathrm{Null}(A)$. [Teorem 5 side 217 i EP]. Vi finner en basis for Null(A) ved å bringe A på redusert echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 9 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & -4 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vi velger $x_3 = r$, $x_4 = s$ og $x_5 = t$. En basis for $V^\perp$ blir dermed $\mathbf{u_1} = (-13, 4, 1, 0, 0)$, $\mathbf{u_2} = (4, -3, 0, 1, 0)$ og $\mathbf{u_3} = (-11, 4, 0, 0, 1)$.

$\boxed{23}$ **a)** Ved å bruke formlene (2) og (3) (side 211 i E& P) og definisjonen $|\mathbf{w}| = \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$ får vi

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) + (\mathbf{u}-\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2 \end{aligned}$$

b) Helt tilsvarende punkt **a)**, får vi at

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) - (\mathbf{u}-\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \\ &= 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 4\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \end{aligned}$$

$\boxed{30}$ Hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ og $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, så er

$$0 = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2.$$

Altså er $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, og dermed også $\mathbf{v} = -\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Eksamensoppgaver

$\boxed{\text{Des. 03, oppg. 5}}$ **a)** La A være 5×3-matrisen som har $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_5$ som rader. Da er $V = \mathrm{Row}(A)$ og $V^\perp = \mathrm{Null}(A)$. Vi omformer A til en (redusert) echelonmatrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da er $\mathbf{y}_1 = (1,0,1)$ og $\mathbf{y}_2 = (0,1,-1)$ en basis for $V = \text{Row}(A)$, og $\mathbf{z} = (-1,1,1)$ er en basis for $V^\perp = \text{Null}(A)$.

b) Ved å bruke Gram–Schmidts ortogonaliseringsalgoritme får vi en ortogonal basis for V:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{y}_2 - \Big(\frac{\mathbf{y}_2\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\Big)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b} = (-1,3,2)$ inn i V er

$$\mathbf{p} = \Big(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\Big)\mathbf{u}_1 + \Big(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2}\Big)\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Alternativt: $\mathbf{p} = \mathbf{b} - \mathbf{q}$ der $\mathbf{q}$ er den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i $V^\perp$:

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} - \mathbf{q} = \mathbf{b} - \Big(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{z}}{\mathbf{z}\cdot\mathbf{z}}\Big)\mathbf{z} = \begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Alternativ (uten Gram–Schmidts ortogonaliseringsalgoritme og Teorem 1): Vi kan uttrykke $\mathbf{b}$ på formen $\mathbf{b} = \mathbf{p}+\mathbf{q}$, der $\mathbf{p} = c_1\mathbf{y_1} + c_2\mathbf{y_2}$ er den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i V og $\mathbf{q} = c_3\mathbf{z}$ for konstanter c_1, c_2 og c_3 (se E&P s. 222).

Vektorligningen $c_1\mathbf{y_1} + c_2\mathbf{y_2} + c_3\mathbf{z} = \mathbf{b}$ gir oss det lineære systemet

$$\begin{aligned} c_1 \qquad\quad - c_3 &= -1\\ c_2 + c_3 &= 3\\ c_1 - c_2 + c_3 &= 2 \end{aligned}$$

Ved Gausseliminasjon får vi

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&-1\\0&1&1&3\\1&-1&1&2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&2\end{array}\right],$$

slik at systemet har unik løsning $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$. Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i V er dermed gitt ved

$$\mathbf{p} = \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

c) Dersom $\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w} = \mathbf{0}$, så er $0 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{v}\cdot(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = \alpha|\mathbf{v}|^2$. Siden $|\mathbf{v}|^2 \neq 0$ når $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, følger at $\alpha = 0$.

Ved å ta prikkproduktet med $\mathbf{w}$, kan vi på samme måte konkludere at $\beta = 0$. Dette viser at $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige.

Mai 01, oppg. 4 Nullrommet til A, $\text{Null}(A)$, er løsningsrommet til det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi finner løsningene ved først å omforme A til en echelonmatrise E (evt. en redusert echelonmatrise):

$$A = \begin{bmatrix}1&2&3&5\\1&5&-9&-4\\2&5&2&7\end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \begin{bmatrix}1&2&3&5\\0&3&-12&-9\\0&1&-4&-3\end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)R_2+R_3]{(\frac{1}{3})R_2} \begin{bmatrix}1&2&3&5\\0&1&-4&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix} = E.$$

Med $x_3 = s$ og $x_4 = t$ blir $x_2 = 4x_3 + 3x_4 = 4s + 3t$ og $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = -11s - 11t$ slik at Null(A) er gitt ved

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-11s-11t, 4s+3t, s, t) = s(-11, 4, 1, 0)+t(-11, 3, 0, 1), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

En basis B for Null(A) er vektorene vi får med henholdsvis $s = 1$, $t = 0$ og $s = 0$, $t = 1$:

$$B = \{(-11, 4, 1, 0), (-11, 3, 0, 1)\}.$$

I det gitte inhomogene systemet er høyresiden $\mathbf{b} = (1, 1, 2)$ lik første kolonne i A slik at én løsning er $\mathbf{x_0} = (1, 0, 0, 0)$. Løsningsmengden er alle vektorer av formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h = (1, 0, 0, 0) + s(-11, 4, 1, 0) + t(-11, 3, 0, 1), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

b) I echelonmatrisen E er kolonne 1 og 2 pivotkolonner. De tilsvarende kolonnene i A er da en basis S for kolonnerommet Col(A):

$$S = \{(1, 1, 2), (2, 5, 5)\}.$$

Ikkenullradene i E er en basis T for radrommet Row(A):

$$T = \{(1, 2, 3, 5), (0, 1, -4, -3)\}.$$

Siden $\text{Row}(A)^\perp = \text{Null}(A)$, får vi fra **a)** at en basis for $\text{Row}(A)^\perp$ er

$$B = \{(-11, 4, 1, 0), (-11, 3, 0, 1)\}.$$

Flervalgsoppgaver

$\boxed{1}$ Vektorene $\mathbf{u} = (2, 2, -1, k)$ og $\mathbf{v} = (k, 1, 1, k)$ er ortogonale hvis og bare hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Vi får

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2k + 2 - 1 + k^2 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Vi ser at $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ hvis og bare hvis $k = -1$. Riktig svar er følgelig alternativ **C**.