Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet Institutt for matematiske fag	TMA4110 Matematikk 3 Høst 2010 **Løsningsforslag — Øving 9**

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.2

11 Vi ønsker altså å finne c_1, c_2 slik at $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$, eller

$$\begin{aligned} 7c_1 + 3c_2 &= 1 \\ -6c_1 - 3c_2 &= 0 \\ 4c_1 + 2c_2 &= 0 \\ 5c_1 + 3c_2 &= -1 \end{aligned}$$

Gausseliminasjon av dette systemet gir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og tilbakesubstitusjon gir $c_1 = 1$ og $c_2 = -2$, altså er $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$.

19 Vi ønsker å finne ut om vektorene $\mathbf{v_1} = (2, 0, 3, 0)$, $\mathbf{v_2} = (5, 4, -2, 1)$ og $\mathbf{v_3} = (2, -1, 1, -1)$ er lineært uavhengige. Vi tar utgangspunktet i ligningen $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$, som gir det lineære systemet

$$\begin{aligned} 2c_1 + 5c_2 + 2c_3 &= 0 \\ 4c_2 - c_3 &= 0 \\ 3c_1 - 2c_2 + c_3 &= 0 \\ c_2 - c_3 &= 0 \end{aligned}$$

som vi løser mhp. konstantene c_1, c_2 og c_3. Ved Gausseliminasjon får vi

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

slik at eneste løsning er $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Vektorene $\mathbf{v_1} = (2, 0, 3, 0)$, $\mathbf{v_2} = (5, 4, -2, 1)$ og $\mathbf{v_3} = (2, -1, 1, -1)$ er dermed lineært uavhengige.

Alternativt kunne vi sette de tre vektorene opp som kolonner i en matrise A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

og bruke Theorem 3 på side 178 i EP. Hvis A har en 3×3-undermatrise med determinant ulik null, så er vektorene $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ lineært uavhengige. Tar vi de tre nederste radene i A og regner ut determinanten, får vi

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9.$$

Det betyr at $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ er lineært uavhengige.

$\boxed{25}$ Vi husker fra definisjonen av lineær uavhengighet mellom vektorer, som er gitt f.eks. på side 175 i ELA, at tre vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ er lineært uavhengige hvis (og bare hvis) ligningen

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \tag{1}$$

har som eneste løsning at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Fra definisjonen av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ i oppgaven følger det at ligningen (1) over kan skrives som

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2) + c_3(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$$

eller

$$(c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{v}_1 + (2c_2 + 2c_3)\mathbf{v}_2 + 3c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Det er gitt i oppgaven at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er lineært uavhengig, derfor *må* c_1, c_2 og c_3 oppfylle systemet

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_2 + 2c_3 &= 0 \\ 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

som har kun én løsning, nemlig $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Altså er $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ og $\mathbf{u}_3$ lineært uavhengige.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.3

$\boxed{5}$ Her er det tilstrekkelig å merke seg at samtlige vektorer har første koordinat lik 0. Dermed vil også alle lineærkombinasjoner av disse vektorene ha første koordinat lik 0, så disse vektorene kan umulig utspenne hele $\mathbb{R}^3$ ($(1,0,0)$ vil f.eks ikke være inneholdt i $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$).

$\boxed{13}$ Vi skal finne en basis for underrommet $W = \{\, (a,b,c,d) \mid a = 3c \text{ og } b = 4d \,\}$ i $\mathbb{R}^4$.

Vi har

$$(a,b,c,d) = (3c, 4d, c, d) = c(3,0,1,0) + d(0,4,0,1).$$

W er følgelig utspent av vektorene $\mathbf{u} = (3,0,1,0)$ og $\mathbf{v} = (0,4,0,1)$. Siden $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige, er de følgelig en basis for W.

$\boxed{18}$ Vi kan bringe systemet over på echelonform ved å trekke 2 ganger rad 1 fra rad 2; det gir det ekvivalente systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_3 - 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Vi setter $x_2 = s$ og $x_4 = t$ (frie variable) og tilbakesubstitusjon gir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3s - 20t - 5t \\ s \\ 5t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En basis for løsningsrommet er dermed gitt ved vektorene $(-3, 1, 0, 0)$ og $(-25, 0, 5, 1)$; disse svarer til henholdsvis $s = 1, t = 0$ og $s = 0, t = 1$ (se side 184-186).

Eksamensoppgaver

$\boxed{\text{A-46}}$ La $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = u$. Da er $x_1 = -(s + t + u)$, og løsningene er gitt ved

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(s + t + u) \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altså danner vektorene $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ og $(-1, 0, 0, 1)$ en basis for V, og dermed er $\dim V = 3$.

$\boxed{4}$ **a)** Siden en kvadratisk matrise er inverterbar hvis og bare hvis determinanten ikke forsvinner, så regner vi ut $\det A$. Det kan vi f. eks. gjøre ved å utvikle etter siste rad.

$$\det A = 1 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot a) + 1 \cdot (a \cdot a - 2 \cdot 1) = a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1).$$

Matrisen A er inverterbar når $a \notin \{-1, 2\}$

b) Ved å utføre Gausseliminasjon på tilleggsmatrisen til systemet får vi

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1+t \\ 1 & 2 & 0 & 2+t \\ 1 & 0 & 1 & 3+t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3+t \\ 1 & 2 & 0 & 2+t \\ 2 & 2 & 1 & 1+t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3+t \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -5-t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3+t \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 4+t \end{bmatrix}$$

Dette viser at systemet har løsning hvis og bare hvis $t = -4$.

c) Vi benytter Gauss-Jordaneliminasjon til å finne den reduserte echelonformen som er radekvivalent med matrisen.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En basis for nullrommet kan f. eks. bestå av vektoren $[1, 1, -1]^T$.

Flervalgsoppgaver

$\boxed{1}$ Ligningen $x + y = 0$ i alternativ **B** definerer et underrom i $\mathbb{R}^2$ siden løsningsmengden til et homogent, lineært ligningssystem med m ligninger og n ukjente er et underrom i $\mathbb{R}^n$ (EP4.1 Teorem 2). Her er $m = 1$ og $n = 2$.

Ingen av de andre alternativene gir underrom: Et underrom av $\mathbb{R}^2$ må inneholde nullvektoren. Altså kan vi utelukke **A** og **D** siden $(x, y) = (0, 0)$ ikke er løsninger til disse ligningene. Vi ser også at løsningsmengden i alternativ **C** ikke er lukket under addisjon. Både $(1,0)$ og $(0,1)$ er med, men $(1,0)+(0,1) = (1,1)$ er ikke med. Følgelig vil heller ikke ligningen i **C** definere et underrom.

$\boxed{2}$ Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis matrisen med de tre vektorene som kolonnevektorer har determinant ulik 0 (EP 4.3 Theorem 2). Her er

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 4 \\ -3 & -5 & c-3 \end{vmatrix} = 10c - 10.$$

Vektorene er lineært uavhengige hvis og bare $10(c-1) \neq 0$, $c \neq 1$. Riktig svar er altså **C**.