TMA4110
Matematikk 3
Høst 2010

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 5

Fra Edwards & Penney avsnitt 1.2

11 Vi bruker elementære radoperasjoner for å omforme totalmatrisen til echelonform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{SWAP}(R_1,R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[(-2)R_1+R_3]{(-2)R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{SWAP}(R_2,R_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{(-2)R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right].$$

Ved Gausseliminasjon har vi altså fått ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_2 \qquad\quad &= -2 \\ -\ x_3 &= -4 \end{aligned}$$

som har entydig løsning som vi finner ved tilbakesubstitusjon:

$$x_3 = 4, \quad x_2 = -2, \quad x_1 = 5 - 3x_2 - 2x_3 = 3.$$

15 Vi bruker elementære radoperasjoner for å omforme totalmatrisen til echelonform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 8 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{SWAP}(R_1,R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & 8 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[(-5)R_1+R_3]{(-3)R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{SWAP}(R_2,R_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Av echelonmatrisen ser vi ligningssystemet er inkonsistent. Det har ingen løsninger siden nederste rad svarer til ligningen $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$ som ikke har løsning.

28 Vi bruker elementære radoperasjoner for å omforme totalmatrisen til echelonform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 7 & 4 & 9 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\text{SWAP}(R_1,R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & -1 & 3 & a \\ 7 & 4 & 9 & c \end{array}\right] \xrightarrow[(-7)R_1+R_3]{(-2)R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & -5 & 1 & a-2b \\ 0 & -10 & 2 & c-7b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-2)R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & -5 & 1 & a-2b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-3b \end{array}\right].$$

Hvis $c = 2a+3b$, får vi uendelig mange løsninger siden ligningssystemet blir konsistent og har en fri variabel. Hvis $c \neq 2a+3b$, blir ligningssystemet inkonsistent. Det fins ingen løsning siden tredje ligning $0x + 0y + 0z = c - 2a - 3b$ ikke har løsning. Ligningssystemet har aldri entydig løsning, uansett valg av a, b og c.

Fra Edwards & Penney avsnitt 1.3

$\boxed{5}$ Gauss-Jordan eliminasjon gir

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -11\\ 2 & 3 & -19\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & -11\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & -11\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$\boxed{14}$ Gauss-Jordan-eliminasjon gir

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 5 & 2 & 3\\ 2 & 7 & 7 & 22\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -1 & -2 & -7\\ 0 & 1 & 3 & 12\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 1 & 3 & 22\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -4 & -16\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix}.$$

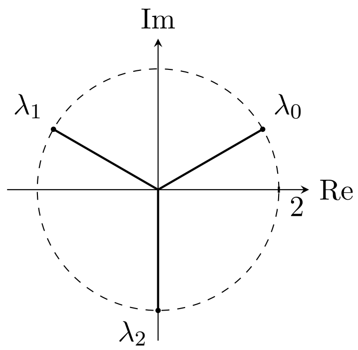
Eksamensoppgaver (`www.math.ntnu.no/emner/TMA4110/2010h/eksoppg/xoppg.pdf`)

$\boxed{\text{A-4a}}$ Vi har $8i = 8e^{i\pi/2}$, så tredjerøttene er da på formen

$$\lambda_k = 2e^{i\varphi_k}, \quad \varphi_k = \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \frac{(1+4k)\pi}{6}, k \in \{0,1,2\},$$

altså

$$\lambda_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i$$
$$\lambda_1 = 2e^{5i\pi/6} = -\sqrt{3} + i$$
$$\lambda_2 = 2e^{9i\pi/6} = -2i$$



$\boxed{\text{A-8}}$ En funksjon $y = f(t)$ er begrenset hvis det fins en konstant M slik at $|f(t)| \leq M$ for alle t. Vi skal avgjøre for hvilke ω løsningen $y(t)$ av

$$2y'' + 8y = \cos\omega t \tag{1}$$

ikke er begrenset. Fra Kreyszig 2.8 (tvungne svingninger) vet vi at dette bare vil skje når vi har resonans, dvs. når $\omega^2 = \omega_0^2 = k/m = 4$, $\omega = \pm 2$.

Vi kan også begrunne svaret ($\omega = \pm 2$) ved å regne ut $y(t)$ for alle ω. Den karakteristiske ligningen $2\lambda^2 + 8 = 0$ har komplekse røtter $\lambda = \pm 2i$. Følgelig har vi

$$y_h = A\cos 2t + B\sin 2t = C\cos(2t - \delta) \qquad \text{(på faseform).}$$

For $\omega \neq \pm 2$ har vi en partikulær løsning på formen $y_p = a\cos\omega t + b\sin\omega t$. Innsetting i (1) gir $a = 1/(8-2\omega^2)$ og $b = 0$. Når $\omega = \pm 2$ må vi modifisere og setter $y_p = t(a\cos 2t + b\sin 2t)$. Innsetting i (1) gir $a = 0$ og $b = 1/8$. Følgelig er

$$\begin{aligned} y = y_1(t) &= C\cos(2t-\delta) + \frac{1}{2(4-\omega^2)}\cos\omega t \qquad \text{når } \omega \neq \pm 2, \\ y = y_2(t) &= C\cos(2t-\delta) + \tfrac{1}{8}t\sin 2t \qquad \text{når } \omega = \pm 2. \end{aligned}$$

Vi ser at $y_1(t)$ er begrenset siden $|\cos(2t-\delta)| \leq 1$ og $|\cos\omega t| \leq 1$. Men vi kan ikke finne noen konstant M slik at $|y_2(t)| \leq M$ for alle t. For $t = t_n$ gitt ved $2t_n = \pi/2 + 2n\pi$ har vi

$$y_p(t_n) = \frac{1}{8}t_n\sin 2t_n = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) \to \infty \qquad \text{når } n \to \infty.$$

Flervalgsoppgaver

$\boxed{1}$ Fra notatet om ubestemte koeffisienters metode, har vi at

$$y_p = x^m(Ax^2 + Bx + C)e^{-4x}$$

der

$$m = \begin{cases} 0 & \text{hvis } -4 \textit{ ikke} \text{ er en rot i den karakteristiske ligningen} \\ 1 & \text{hvis } -4 \text{ er en } \textit{enkel} \text{ rot i den karakteristiske ligningen} \\ 2 & \text{hvis } -4 \text{ er en } \textit{dobbel} \text{ rot i den karakteristiske ligningen.} \end{cases}$$

Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda+4)^2 = 0$, så vi har en dobbelrot $\lambda = -4$. Dermed skal m velges lik 2, og vi får

$$y_p = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{-4x}$$

Dermed er alternativ **D** riktig.

$\boxed{2}$ Hvis $z^3 = 2e^{i\pi/6}$, så er z en av tredjerøttene til $2e^{i\pi/6}$. Altså kan z skrives $z = \sqrt[3]{2}e^{i\varphi}$, der

$$\varphi = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} = \frac{\pi(12k+1)}{18}, \quad k \in \{0,1,2\}$$

Siden $z^n = (\sqrt[3]{2})^n e^{in\varphi}$, er z^n reelt hvis og bare hvis $n\varphi = l\pi$, der l er et heltall. Vi ser at minste n er 18, altså er alternativ **C** korrekt.

Alternativt: Alle de oppgitte alternativene er multipler av 3, så vi kan regne ut z^n for alle de oppgitte verdiene av n ved å bruke at $z^{j\cdot k} = (z^j)^k$ for j, k heltall (assosiativ lov for kompleks multiplikasjon). Så vi har f.eks at $z^{18} = (z^3)^6 = 2^6 e^{6i\pi/6} = 2^6 e^{i\pi}$, som er reelt, og ved å sjekke at $z^6 = (z^3)^2$ og $z^9 = (z^3)^3$ *ikke* er relle, kan vi konkludere at dette er det minste av de oppgitte alternativene.

Merk: vi har ikke vist at z^{18} er den *minste* potensen av z som blir reell, kun at det er den minste potensen av de oppgitte alternativene. Et enkelt eksempel som illustrerer forskjellen er fjerderøttene av 1, som er gitt ved $\{1, i, -1, -i\}$. Per definisjon har vi at $z^4 \in \mathbb{R}$, men det er ikke slik at 4 er den minste potensen slik at dette inntreffer. Vi har at $1^2 = 1$, $i^2 = -1$, $(-1)^2 = 1$ og $(-i)^2 = -1$, så samtlige fjerderøtter av 1 tilfredstiller $z^2 \in \mathbb{R}$, samtidig som 2 ikke er et (heltallig) multippel av 4. Så vi kan ikke (uten videre regning) vite at ikke f.eks z^5 blir reell for alle z som tilfredstiller $z^3 = 2e^{i\pi/6}$.