BEVIS FOR UBESTEMTE KOEFFISIENTERS METODE

Resultatene i tabellen kan bevises ved regning ("brute force").

a) Ser først på $c = 0$. Vil vise at A_k-ene kan bestemmes (og se at løsningen er entydig).

$n = 0, 1$ verifiserer du selv!

$n \geq 2$: La

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{k=0}^{n} A_k x^k \\
y' &= \sum_{k=1}^{n} k A_k x^{k-1} \\
y'' &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) A_k x^{k-2}
\end{aligned}
$$

Ønsker

$$
\begin{aligned}
y'' + ay' + by = &\sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+2)(k+1)A_{k+2} + a(k+1)A_{k+1} + bA_k\right] x^k \\
&+ (bA_{n-1} + naA_n)x^{n-1} + bA_n x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k
\end{aligned}
$$

$b \neq 0$:
$A_n = b^{-1}a_n$, $A_{n-1} = b^{-1}(a_{n-1} - nab^{-1}a_n)$ osv.
Får bestemt A_k-ene suksessivt.

$b = 0, a \neq 0$ (dvs. $\lambda = 0$ er en enkel rot):
Med

$$
y = x \sum_{k=0}^{n} A_k x^k = \sum_{k=0}^{n} A_k x^{k+1}
$$

får vi på tilsvarende måte

$$
\sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+2)(k+1)A_{k+1} + a(k+1)A_k\right] x^k + (n+1)aA_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.
$$

Igjen kan A_k-ene bestemmes suksessivt.

$b = 0 = a$:
Med

$$
y = x^2 \sum_{k=0}^{n} A_k x^k = \sum_{k=0}^{n} A_k x^{k+2}
$$

får vi kravet

$$\sum_{k=0}^{n}(k+2)(k+1)A_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

og $A_k = (k+2)^{-1}(k+1)^{-1}a_k$.

Ser så på $c \neq 0$:
$y = e^{cx}u$ tilfredsstiller $y'' + ay' + by = P_n(x)e^{cx}$ hvis og bare hvis

$$\left[u'' + (2c+a)u' + (c^2+ac+b)u\right] e^{cx} = P_n(x)e^{cx}$$

eller $u''+\widetilde{a}u'+\widetilde{b}u = P_n(x)$ som er behandlet ovenfor. Vi finner $u = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k$ når $\widetilde{b} = c^2+ac+b \neq 0$, mens $u = x\sum_{k=0}^{n} A_k x^k$ når $c^2+ac+b = 0$, $2c+a \neq 0$ og $u = x^2\sum_{k=0}^{n} A_k x^k$ når $c^2+ac+b = 0$, $2c+a = 0$.

b) Utledningen i a) gjelder også om $c \in \mathbb{C}$, $c = \alpha + i\beta$. Så

$$y'' + ay' + by = P_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

har en løsning

$$y = x^m \left(\sum_{k=0}^{n} A_k x^k\right) e^{(\alpha+i\beta)x} \qquad (*)$$

der $m = 0$ hvis $\alpha + i\beta$ ikke er rot i (1), $m = 1$ hvis $\alpha + i\beta$ er rot i (1), og der A_k-ene nå er komplekse tall.
Siden

$$\begin{aligned} & (y_1+iy_2)'' + a(y_1+iy_2)' + b(y_1+iy_2) = r_1 + ir_2 \\ \iff \quad & y_1'' + ay_1' + by_1 = r_1 \quad \text{og} \quad y_2'' + ay_2' + by_2 = r_2 \end{aligned}$$

vil $\operatorname{Re} y$, $\operatorname{Im} y$ i $(*)$ være løsninger av hhv. $y'' + ay' + by = P_n(x)\cos\beta x$ og $y'' + ay' + by = P_n(x)\sin\beta x$. Nå er

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left\{x^m \left[\sum_{k=0}^{n} (\operatorname{Re} A_k + i \operatorname{Im} A_k)\, x^k\right] e^{\alpha x} (\cos\beta x + i \sin\beta x)\right\} \\ & \qquad = x^m e^{\alpha x} \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{Re} A_k \cos\beta x - \operatorname{Im} A_k \sin\beta x)\, x^k. \end{aligned}$$

Tilsvarende for $\operatorname{Im} y$.