IF uke 17

Repetisjon

Mentimeter

Instructions

Go to

www.menti.com

Enter the code

8695 8776

Or use QR code

1. Komplekse tall

- $i = \sqrt{-1}$
- $z = a + bi = Re(z) + Im(z)i$
- $\overline{z} = a - bi$
- $z = re^{i(\theta + 2\pi k)} = r(cos(\theta) + isin(\theta))$
- $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$

Hva er $z\bar{z}$?

a^2 + b^2	a^2-2abi+b^2	a^2+b^2i	a^2-b^2

Hvor mange løsninger har likningen

$$10z^5 + z = -1$$

2. Lineære likningssystemer og gausseliminasjon

- $$\begin{array}{ccc} a_{1n}x_n + \ldots + a_{11}x_1 & & b_0 \\ \ldots & = & \ldots \\ a_{mn}x_n + \ldots + a_{m1}x_1 & & b_m \end{array}$$
- $$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{1n} & \ldots & a_{11} & b_0 \\ & \ldots & & \ldots \\ a_{mn} & \ldots & a_{m1} & b_m \end{array}\right]$$
- Radoperasjoner: 1. Multipliser rad 2. Legge til multiplum av rad 3. Bytte rekkefølge
- Trappeform, pivotelementer og redusert trappeform
- Enhver matrise A er radekvivalent med en redusert trappeformmatrise B

Er $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ på

Mentimeter

Trappeform	Redusert trappeform	Ingen av disse

Hvis A er en $m \times n$-matrise og $n > m$, og likningssystemet $Ax = b$ er løsbart, så har vi

- Én løsning
- Uendelig mange løsninger
- Ingen løsninger

3. Vektorligninger

- $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ kalles en lineærkombinasjon av vektorene x_i med vekter a_i
- Det lineære spennet av $x_1, \ldots, x_n$ ($Sp\{x_1, \ldots, x_n\}$) er delmengden av vektorrommet bestående av alle lineærkombinasjoner av $x_1, \ldots, x_n$

Beskriv geometrisk det lineære spennet av $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Mentimeter

4. Matriser

- Matriseoperasjoner $A(v+w) = Av + Aw, A(cv) = c(Av)$
- Matrisemultiplikasjon $A(BC) = (AB)C, (cA)B = c(AB) = A(cB), A(B+C) = AB + AC$
- Den transponerte bytter om rollen på rader og kolonner
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, A^0 = I_n$
- Hvis $AB = I_n = BA$, så er B invers av A
- Hvis A er inverterbar har $Ax = b$ en entydig løsning
- Vi kan finne den inverse av A ved å løse $[A|I_n] \sim [I_n|A^{-1}]$

Mentimeter

Hvis A er en $(m \times n)$-matrise og B en $(m \times k)$-matrise, så er $(B^T A)^T$

m x n

m x k

n x k

k x n

Ingen av delene

5. Lineær uavhengighet

- $v_1, \ldots, v_n$ er lineært uavhengige hvis eneste løsning av $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$ er at $a_1 = \ldots = a_n = 0$
- Hvis $v_1, \ldots, v_n$ er lineært avhengige, eksisterer det minst én v_k som kan uttrykkes som en lineærkombinasjon av de andre.
- $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis $Sp\{v_1, \ldots, v_n\} = \mathbb{R}^n$

Mentimeter

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{er}$$

Lineært uavhengige	Lineært avhengige	Vet ikke

$\{v_1, \ldots, v_m\}, v_i \in \mathbb{R}^n, m > n$ **er**

Lineært uavhengige

Lineært avhengige

Vet ikke

6. Determinanter

- $det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$
- 1. $det[a_1] = a_1$, 2. $detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}, C_{ij} = (-1)^{i+j} detA_{ij}$
- a) $detB = k \cdot detA$ hvis vi ganger en rad i A med k b) $detB = detA$ hvis vi legger et multiplum rad i A til en annen c) $detB = -detA$ hvis vi bytter rader
- Hvis A er triangulær er determinanten lik produktet av diagonalen, $detA = TrA$
- $detAB = detA \cdot detB$
- $detA^T = detA$
- A er inverterbar hvis og bare hvis $detA \neq 0$

Hva er volumet av parallellepipedet utspent av $a, b, c \in \mathbb{R}^3$? $A = [a, b, c]$

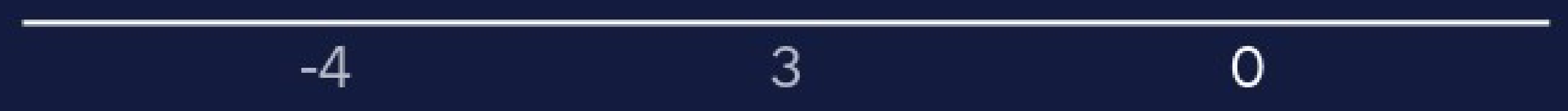
det A

a x b x c

|det A|

|a||b||c|cos(e)

Hva er determinanten av $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$?



7. Vektorrom

- Vektorrom V = mengde vektorer $\{v_1, \ldots, v_n\}$ lukket under addisjon ($v_1 + v_2 \in V$) og skalarmultiplikasjon ($av \in V, a \in \mathbb{R}$) + aksiomer
- $$\begin{aligned}
&1. \quad (u+v)+w = u+(v+w)\\
&2. \quad u+v = v+u\\
&3. \quad v+0 = v\\
&4. \quad u+(-u) = 0\\
&5. \quad (ab)u = a(bu)\\
&6. \quad 1u = u\\
&7. \quad a(u+v) = au+av\\
&8. \quad (a+b)u = au+bv
\end{aligned}$$
- $\mathcal{P}_n = \{p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 x^0, a \in \mathbb{R}\}$
- $C^n(D) = \{n \text{ ganger kontinuerlig deriverbare reelle funksjoner paa } D \subset \mathbb{R}, f: D \to \mathbb{R}\}$
- Uendelige rekker $(a_1, a_2, \ldots)$
- Matriser $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

7. Vektorrom

- $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ er en basis for V hvis $Sp\{b_1, \ldots, b_n\} = V$ og $\{b_1, \ldots, b_n\}$ er lineært uavhengige.
- Enhver $v \in V$ kan uttrykkes som $\sum_i^n c_i b_i = [c_i]_{\mathcal{B}}$
- dim $V = |\mathcal{B}|$
- Underrom $U =$ delmengde av V som også er vektorrom. Sjekk a) $0 \in U$, b) $u + v \in U$, c) $cu \in U$
- Hvis $U \subseteq V$ så er dim $U \leq$ dim V

Mentimeter

7. Vektorrom

- Col $A = \{Ax \in \mathbb{R}^m : v \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ for $m \times n$-matrise A
- Null $A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$
- Row A = Col $A^T \subseteq \mathbb{R}^n$
- $A = [1, 2]^T = [a, b, c] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_1' \\ 0 & 1 & c_2' \end{bmatrix} = [a', b,' c']$
- Ser at $Ax = 0$ hvis vi setter $x_1 = -c_1' x_3$ og $x_2 = -c_2' x_3 \Rightarrow$ Null $A = Sp\{ \begin{bmatrix} -c_1' \\ -c_2' \\ 1 \end{bmatrix} \}$
- Videre gir $c' = c_1' a' + c_2' b'$ at $c = c_1' a + c_2' b \Rightarrow$ Col $A = \{a, b\}$
- Radoperasjonene viser at radene er lineært uavhengige $\Rightarrow$ Row $A = \{1, 2\}$
- Basis for: 1) Col A = pivotkolonner, 2. Row A = pivotrader, 3. Null A = frie variabler
- dim Col A = dim Row A = rank A
- dim Null A + rank A = n

Mentimeter

Er $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, det(A) > 0, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ et underrom av $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

Ja

Nei

Kun for a, b,c>0

Vet ikke

Mentimeter

Hvilken av følgende mengder er en basis for $\mathcal{P}_3$?

x^3	x^2, x, 1	x^3, x^2, x, 1	Ingen av delene

Hvis $A = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 & e_4 \end{bmatrix}$ og $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i \neq 0$, så er

rank A = 3 og dim null A = 1	dim row A = 2 og dim null A = 3	dim col A = 2 og dim null A = 2	Ingen av delene

Mentimeter

8. Lineærtransformasjoner

- $T : U \to V$ er en lineærtransformasjon hvis $T(cu + dv) = cT(u) + dT(v)$
- Ker $T = \{v \in V : T(v) = 0\}$, Im $T = \{T(v)\}$
- T er injektiv hviss Ker $T = 0$ og surjektiv hviss Im$(T) = W$
- $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kan beskrives ved $T(x) = Ax$ der $A = [T(e_1)\ T(e_2) \dots T(e_n)]$ kalles standardmatrisen til T
- $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ er basiser for V, W, så er $[T(v)]_\mathcal{C} = A[v]_\mathcal{B}$ med $A = [[T(b_1)]_\mathcal{C}, \dots, [T(b_n)]_\mathcal{C}]$
- Ker $T =$ Null A og Im$(T) =$ Col A
- T er surjektiv hvis Col $A = \mathbb{R}^m$ og er injektiv hvis dim Col $A = n$
- Hvis $S(T(v)) = v$ og $T(S(w)) = w$ for alle $v \in V, w \in W$, så er S og T inverse og V og W isomorfe
- T har en invers hviss injektiv og surjektiv $\Rightarrow$ A er inverterbar

Hva er $\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}}$ i basisen $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$?

[-10, 16]	[-10, 8]	[-5, 12]	Ingen av delene

Mentimeter

En lineærtransformasjon $T : V \to W$ for dim $V = n$ og dim $W = m$ gitt ved $T(v) = Av$ har en invers hvis

T er en isomorfi	Rank A = n = m	A ~ I	Alle

Mentimeter

9. Projeksjon

- Indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ oppfyller: 1. symmetri, 2. linearitet, 3. positivitet
- $$1. \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$
  $$2. \langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$$
  $$3. \langle u, u \rangle \geq 0, = 0 \Rightarrow v = 0$$
- Prikkproduktet er "standard" indreprodukt i $\mathbb{R}^n$
- $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ og $cos(\theta) = \dfrac{\langle v, w \rangle}{||v||\,||w||}$
- v, w er ortogonale hvis $cos(\theta) = 0$, og parallelle hvis $cos(\theta) = \pm 1$
- Projeksjonen av w på linjen utspent av v : $P_v(w) = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} v$
- La $(b_1, \ldots, b_n)$ være en ortogonal basis for U, da er projeksjonen av w på U gitt ved $P_U(w) = P_{b_1}(w) + \ldots + P_{b_n}(w)$
- $P_U(w)$ er det nærmeste punktet til w på U og avstanden fra w til U er $||w - P_U(w)||$

9. Projeksjon

- Det ortogonale komplementet til $U \subseteq V$ er $U^{\perp} = \{v \in V : \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$
- dim $U+$ dim $U^{\perp}$ =dim V
- $P_U : V \to V$ er er en lineærtransformasjon med Im $P = U$ og Ker $P_U = U^{\perp}$
- $P_U(v) = Av$, med A definert av hvordan projeksjonen fungerer på basisen
- For en reell $m \times n$-matrise A, så er $(\mathrm{Col}\ A)^{\perp} = \mathrm{Null}\ A^T$ og $(\mathrm{Null}\ A)^{\perp} = \mathrm{Col}\ A^T$
- Gram-Schmidt-metoden gir en ortogonal basis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ut ifra basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$:

$$1. u_1 = v_1 \quad 2. u_k = v_k - \sum_{i_1}^{k-1} P_{u_i}(v_k)$$

- $\langle f, g \rangle = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ for $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$

Mentimeter

Er $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ortogonale mhp $\langle u, v \rangle = u^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} v$?

Ja

Nei

Vet ikke

Representerer $P_U(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} v$ en projeksjon?

Ja

Nei

Vet ikke

Finn en ortogonal basis ut ifra basisen $\{1, cos(x)\}$ mhp

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx$$

{x, sin(x)}

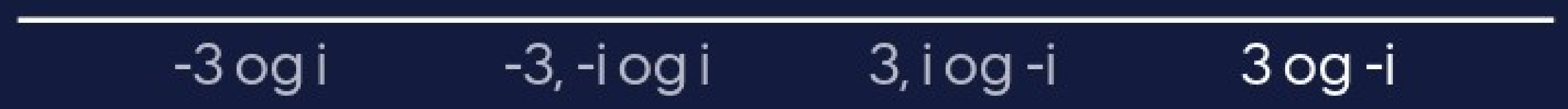
{1, sin(x)-pi/2}

{1, cos(x)-2/pi}

10. Egenverdier og -vektorer

- λ er en egenverdi til $T : V \to V$ hvis det eksisterer en egenvektor $v \neq 0$ slik at $T(v) = \lambda v$
- $\lambda = 0$ er en egenvektor hviss A ikke er inverterbar
- $\{v \in V | T(v) = \lambda v\}$ angir egenrommet til egenverdien λ
- Finner egenverdier ved å sette $det(A - \lambda I_n) = 0$ og egenvektor ved å løse $(A - \lambda I_n)v = 0$
- $n \times n$ kompleks matrise har alltid n egenverdier (inkl mult.).
- $n \times n$ reell matrise, hvis n odde $\Rightarrow \geq 1$ reelle egenverdier (λ og $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$)

Hva er egenverdiene til $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$?



Mentimeter

Egenrommet til $\lambda = 3$ for $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ har dimensjon?

11. Diagonalisering

- $A = n \times n$ matrise er diagonaliserbar hvis $A = PDP^{-1}$ med D diagonal og P inverterbar
- $A^k = PD^kP^{-1}$
- A er diagonaliserbar hviss A har n lin. uavhengige egenvektorer v_i. $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), P = [v_1, \ldots, v_n]$
- Hvis $T : V \to V$ er diagonaliserbar, utgjør egenvektorene en basis $\mathcal{B}$ for V og vi kan skrive $[T(x)]_{\mathcal{B}} = D[x]_{\mathcal{B}}$
- 2×2 reell matrise A med $\lambda = a - bi$ og egenvektor $v \in \mathbb{C}^2$. Da er $A = PCP^{-1}, P = [Re(v), Im(v)], C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$
- En symmetrisk matrise ($A = A^T$) har n reelle egenverder og er diagonaliserbar
- Egenvektorene til en symmetrisk reell matrise har ortogonale egenvektorer (for $\lambda_i \neq \lambda_j$)
- En reell $n \times n$-matrise A er ortogonalt diagonaliserbar med $\lambda_i \in \mathbb{R}$ hviss A er symmetrisk
- $\Rightarrow A = QDQ^T$ der D er diagonal og Q ortogonal (kolonnene ortonormale)

Er $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar?

Hva er A^3 for $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$?

- [2, 1; 1,2]
- 1/2*[3^3+1, 3^3-1; 3^3-1, 3^3+1]
- [2^3, 1^3; 1^3, 2^3]
- [3^3, 1^3; 1^3, 3^3]

12. Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

- Minste kvadraters løsning $\hat{x}$ for $Ax = b$ er $min_x\{||Ax - b||\}$, dvs $A\hat{x} \in$ Col A nærmest b
- $\Rightarrow A\hat{x} - b$ er i $(\text{Col } A)^\perp = \text{Null } A^T \Rightarrow A^T(A\hat{x} - b) = 0$ og vi løser $A^T A\hat{x} = A^T b$
- Interpolasjon finner et polynom $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 x^0$ som går gjennom datapunktene $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2\}$
- $\begin{bmatrix} x_1^n & \ldots & 1 \\ & \ldots & \\ x_m^n & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix}$
- Gir $Ax = b$ og hvis $n < m \Rightarrow$ minste kvadraters løsning gir "beste" polynom

12. Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

- Markovkjeder beskriver en stokastisk sannsynlighetsmodell der systemets tilstand ved tid $t+1$ er kun avhengig av tilstanden ved tid t
- x_0 sannsynlighetsvektor ($x_{0j} > 0, \sum_{j=1}^{n} x_{0j} = 1$), M stokastisk matrise (kol = sannsynlighetsvektorer), Markovkjede $= \{x_0, Mx_0, M^2x_0, \ldots\}$
- En stokastisk matrise har alltid $\lambda = 1$ som egenverdi, og tilhørende egenvektor q (med $\sum_i q_i = 1$) kalt likevektsvektor
- Hvis M regulær stokastisk matrise (det finnes en k slik at $(M^k)_{ij} > 0$), da vil Markovkjeden konvergere til q uavhengig av x_0

Finn første ordens-polynomet som passer best til $(0,1), (1,2), (2,4)$?

y =x+1/2

y = 3/2x+5/6

y = 3/2x+1/6

Mentimeter

Hvert år flytter 5 prosent av Oslos befolkning til Trondheim og 15 prosent flytter motsatt vei, mens resten blir. Hvordan blir fordelingen på sikt?

3/4 av totalen bor i Oslo	4/5 av totalen bor i Oslo	1/3 av totalen bor i Trd	2/7 av totalen bor i Trd

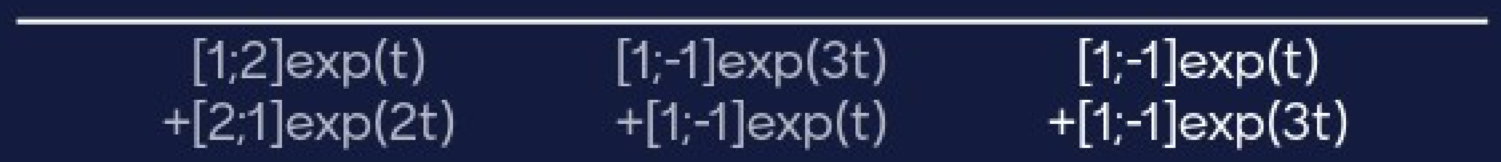
Mentimeter

13. Systemer av differensialligninger

- Løsningene til $y' = Ay$ utgjør et vektorrom
- Hvis $A = PDP^{-1}$ kan vi skrive om til $x' = Dx$ hvilket gir $x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$ og $y(t) = c_1 v_1 x_1(t) + \ldots + c_n v_n x_n(t)$
- Initialbetingelsen $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ gir én unik løsning
- Fasediagram er en skisse av alle løsninger og orientering = vektorfeltet til A + kurver langs pilene
- For en 2×2-matrise har vi tre scenarioer 1. to unike, reelle røtter, 2. to komplekse røtter, og 3. Én reell rot
- 1. $y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$
- 2. $y(t) = c_1 e^{at}(Re(v)cos(bt) - Im(v)sin(bt)) + c_2 e^{at}(Re(v)sin(bt) + Im(v)cos(bt))$ for $\lambda_{1,2} = a \pm bi$
- 3. $y(t) = c_1 e^{\lambda t} v + c_2 e^{\lambda t}(tv + w)$ der $(A - \lambda I)w = v$
- Homogen likning: $y' = Ay$, Inhomogen likning: $y'(t) = Ay(t) + f(t)$
- Generell løsning av inhomogen ligning: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, dvs summen av homogen løsning og partikulærløsning

Finn generell løsning for

$$y' = Ay, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}?$$



Mentimeter

14. Andre ordens differensialligninger

- $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ gir 1. ordens system $x' = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$
- Karakteristisk likning: $det(A - \lambda I) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$
- Gir løsning av x som tidligere funnet med egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}$ og tre scenarioer
- 1. $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- 2. $y(t) = c_1 e^{at} cos(bt) + c_2 e^{at} sin(bt)$ for $\lambda_{1,2} = a \pm bi$
- 3. $y(t) = c_1 e^{\lambda t} t + c_2 e^{\lambda t}$
- Løsninger av $y'' + a_1 y' + a_0 y = f$ er på formen $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
- $y_p(t) = y_2(t) \int \frac{y_1(t) f(t)}{W} dt - y_1(t) \int \frac{y_2(t) f(t)}{W} dt$ med $W = y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1(t)$ og y_1, y_2 lin. uavh. homogene løsninger
- Gjetter gjerne partikulærløsning $\tilde{y}_p \sim f(t)$. Hvis $\tilde{y}_p \sim y_h(t) \Rightarrow$ nytt gjett $t \cdot \tilde{y}_p$
- Initialbetingelser $y(t_0) = a$ og $y'(t_0) = b$ gir unik løsning

Finn unik løsning for $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 2$?

3exp(t)-texp(t)	3texp(t)-exp(t)	texp(t)-exp(3t)

Finn generell løsning for

$$y'' + 2y' + 2y = cos(t)?$$

y(t) = Aexp(-t)cos(t) + Bexp(-t)sin(t) + 2/5sin(t)+1/5cos(t)	y(t) = Aexp(-t)cos(t) + Bexp(-t)sin(t) + 2/5tsin(t)+1/5tcos(t)	y(t) = Aexp(-t) + Bexp(-t) + 2/5tsin(t)+1/5tcos(t)

Interaktiv forelesning uke 17

1 La

$$\mathscr{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$$

og

$$\mathscr{C} = \left(\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} \right)$$

være to ordnede basiser for $\mathbb{R}^2$. Bestem basisbyttematrisen fra

a) $\mathscr{C}$ til $\mathscr{B}$

b) $\mathscr{B}$ til $\mathscr{C}$

2 La $T : V \to W$ være en lineærtransformasjon mellom to vektorrom V og W og la $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ være en mengde av vektorer i V. Anta at T også er injektiv og vis følgende:

Dersom $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ lineært uavhengig i V

så er $\{T(\boldsymbol{v}_1), \dots, T(\boldsymbol{v}_k)\}$ lineært uavhengig i W.

3 Bestem dimensjonen til $(\mathrm{Col}\, A)^\perp$ når

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

4 La $U = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ være et underrom i $\mathbb{R}^3$.

a) Lag en ortogonal basis for U med Gram–Schmidts algoritme.

b) Finn projeksjonen av $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$ ned på U.

c) Finn minste kvadrats-løsningen av det inkonsistente ligningssystemet

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad \text{hvor} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Hva er projeksjonen av $\boldsymbol{b}$ ned på $\mathrm{Null}(A^\top)$?

5 Skriv alle løsningene av ligningen

$$z^3 = \frac{\mathrm{i} - 3}{\sqrt{2}(2 + \mathrm{i})}$$

på formen $z = x + \mathrm{i}y$ og tegn de i det komplekse planet.

6

a) Finn generell løsning til følgende differensialligning:

$$y'' - 4y' + 5y = 2\cos t.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

7 Løs initialverdiproblemet

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} y, y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$