Løsningsforslag ekstraoppgaver 9

10.1.

a) For å finne egenverdiene til en matrise A så må vi finne røttene til det karakteristiske polynomet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, hvor A er en kvadratisk matrise og I er identitetsmatrisen av samme størrelse.

I denne oppgaven får vi, dersom vi kaller matrisen for A, at

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda(\lambda - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vi ser at denne ligningen har løsningene $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 1$. Dette er egenverdiene til matrisen.

Egenvektorene til A er tilknyttet egenverdiene, og vi må finne ikke-null vektorer $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ slik at $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$ og $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$. Vi ser at hvilken som helst vektor, for en gitt a, på formen $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & a \end{bmatrix}^T$ gir $A\mathbf{x}_1 = 0\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Vektoren $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ er dermed en egenvektor til λ_1. Vi ser også at hvilken som helst vektor, for en gitt a, på formen $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix}^T$ gir $A\mathbf{x}_2 = 1\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2$. Vektoren $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ er dermed en egenvektor til λ_2.

Egenrommet korresponderende til λ_1 er med andre ord y-aksen, og egenrommet til λ_2 er x-aksen.

b) Vi fant i forrige oppgave at egenrommene til de forskjellige egenvektorene λ_1 og λ_2 er, henholdsvis x-aksen og y-aksen. Vektorer langs y-aksen blir null-vektoren ved multiplikasjon av A; vektorer langs x-aksen er uendret ved muliplikasjon av A.

10.2.

a) Vi regner ut det karakteristiske polynomet:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-2\lambda & 1 \\ 1 & 1-2\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}((1-2\lambda)(1-2\lambda) - 1) \\ &= 2\lambda(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Vi ser at ligningen $p(\lambda) = 0$ også har løsningene $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 1$. Dette er egenverdiene til matrisen.

Vi ser at vektoren $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ gir $A\mathbf{x}_1 = 0\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Vektoren $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ er dermed en egenvektor korresponderende til $\lambda_1 = 0$. $\mathbf{x}_2$ skal ligge i nullrommet til $A - I = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Dette er utspent av vektoren $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, så vi kaller den $\mathbf{x}_2$. Og verifiserer at $A\mathbf{x}_2 = 1\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2$. I dette tilfellet er egenrommet til λ_1 linjen spent ut av $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, og egenrommet til λ_2 linjen spent ut av $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

b) Vektorer langs $(1, -1)$-linjen blir null-vektoren ved multiplikasjon med matrisen mens vektorer langs $(-1, 1)$-linjen forblir uendret. Dette er altså ganske likt som i forrige oppgave, men egenrommene er rotert med 45 grader.

10.3.

a) Usant. Vi får generelt et n-tegradspolynom som kan ha alt fra null til n ulike nullpunkt. (Det er maksimalt n egenverdier).

b) Sant. Vi har – per definisjon – en ikke-null vektor $\mathbf{x}$ som tilfredsstiller $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$ hvor $c \neq 0$. Derfor har vi funnet en vektor $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x}$ ikke er lik null-vektoren. Men da kan A umulig være null-matrisen; hvis alle elementene i A var lik null ville $A\mathbf{x}$ vært lik null for alle valg av $\mathbf{x}$.

c) Sant. For eksempel har matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ egenvektorene $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ og $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, begge med egenverdi 1. De er lineært uavhengige.

10.4. Vi husker at for alle kvadratiske matriser B er $\det(B^T) = \det(B)$. (For å bevise den likheten kan vi ekspandere B^T langs første rad, og A langs første kolonne og bruke induksjon på dimensjon.) Egenverdiene til A er løsningene av likningen $\det(A - \lambda I) = 0$. Tilsvarende er egenverdiene til A^T løsningene av likningen $\det(A^T - \lambda I) = 0$. Observer at $(A - \lambda I)^T = A^T - \lambda I$, fordi λI er symmetrisk. Nå er vi klare til å regne:

$$\det(A^T - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I)$$

De karakteristiske polynomene til A og A^T er altså like, så A og A^T har samme egenverdier.

10.5.

a) Vi vet fra Teorem 10.5 at egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier er lineært uavhengige, og da følger det fra Teorem 6.12 at matrisen V er inverterbar.

b) Vi regner ut

$$\begin{aligned}
V^{-1}AV &= V^{-1}\begin{bmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= V^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} V^{-1}\lambda_1\mathbf{v}_1 & V^{-1}\lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & V^{-1}\lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 V^{-1}\mathbf{v}_1 & \lambda_2 V^{-1}\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n V^{-1}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= D\begin{bmatrix} V^{-1}\mathbf{v}_1 & V^{-1}\mathbf{v}_2 & \cdots & V^{-1}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= DV^{-1}V \\
&= D,
\end{aligned}$$

der

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

er diagonalmatrisen bestående av egenverdiene til A.

Da kan vi dessuten legge merke til at vi har

$$A = VV^{-1}AVV^{-1} = VDV^{-1}.$$

(Oppgaven spurte ikke om dette, men det er likevel en interessant observasjon, og den hjelper oss med å løse neste deloppgave.)

c) Lag en diagonalmatrise D med egenverdiene på diagonalen, og en matrise V med egenvektorene som kolonner:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Da ser du fra del (b) at matrisen $A = VDV^{-1}$ oppfyller kravene i oppgaven. Regn ut inversen til V på vanlig måte; da får du:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nå kan du gange sammen matrisene og ende opp med:

$$A = VDV^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -36 & 9 & 6 \\ -22 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

10.6. Vi vet at kolonenne til en kvadratisk matrise er lineært avhengige hvis, og bare hvis, determinanten er 0.

a) Radreduserer vi matrisen får vi systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Her har vi én kolonne uten pivot-element, så nullrommet har dimensjon 1. Vi velger $z = t$ som fri kompleks variabel og får at $x = t$ og $y = -2t$ som betyr at nullrommet er

$$\operatorname{null}(A) = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Matrisen har determinant ulik 0. Derfor er kolonnene lineært uavhengige, og nullrommet inneholder kun vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Det er omtrent like hardt arbeid å regne ut en slik determinant som å radredusere, så hvis jeg satt med penn og papir ville jeg radredusert og sett etter frie variabler. For da er det lett å lese av nullrommet, ikke bare om det er ikke-trivielt.

c) Radreduserer vi får vi matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Igjen er den tredje variabelen fri, siden kolonne tre er uten pivot-element. Nullrommet er utspent av $\begin{bmatrix} -i, -2, 1 \end{bmatrix}^T$.

10.7.

a) Vi regner ut dette på vanlig måte. Determinanten er -2 og egenverdiene er $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = i$ og $\lambda_3 = -i$.

Egenrommene er utspent av de korresponderende egenvektorene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Vi kaller matrisen A. Vi regner ut $\det(A) = 2$ og at det karakteristiske polynomet til A er

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

som gir egenverdier $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 2$. Merk at egenverdiene -1 har algebraisk multiplisitet lik to. Vi vet nå fra Teorem 10.20 at egenrommet korresponderende til λ_1 er av dimensjon 1 eller 2. I dette tilfellet er dimensjonen 2, som du raskt ser om du radreduserer $A - \lambda_1 I$.

Egenrommene er utspent av de korresponderende egenvektorene. Det finnes selvsagt mange valg av basis, særlig for egenrommet til λ_1. Om vi setter en av de frie variablene i den radreduserte matrisen til $A - \lambda$ lik 1, mens vi lar den andre frie variablene være 0, og så motsatt etterpå, får vi følgende basis av egenvektorer:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Vi fortsetter å kalle matrisen fra forrige deloppgave A, og kaller matrisen fra denne deloppgaven B. Vi regner ut $\det(B) = 20$. Om vi ser at $B = A + 3I$ følger det at egenvektorene til A også er egenvektorer for B, for om $Av = \lambda v$ er $Bv = (\lambda + 3)v$. Så egenvektorene til B er de samme som de til A, og egenverdiene til B er $\lambda_1 = -1 + 3 = 2$ og $\lambda_2 = 2 + 3 = 5$. Alternativt finner vi egenvektorene til B på samme måte som vi fant dem til A.

d) I denne oppgaven er matrisen, la oss kalle den C, triangulær. Vi ser derfor lett at $\det(C) = 27$ og at det karakteristiske polynomet er $\det(C - \lambda I) = (3 - \lambda)^3$. Derfor har C bare en egenverdi, $\lambda = 3$, og den har algebraisk multiplisitet 3. Siden $C-3I$ bare har en kolonne uten pivot-element er egenrommet korresponderende til $\lambda = 3$ av dimensjon 1. Det er utspent av denne vektoren:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10.8. Hvis vi ganger sammen egenverdiene *med* multiplisitet får vi

$$\begin{aligned} (-2)i(-i) &= -2, \\ (-1)^2 2 &= 2, \\ 2^2 \cdot 5 &= 20, \\ 3^3 &= 27, \end{aligned}$$

altså nøyaktig determinantene til de respektive matrisene.

10.9. Vi fant egenverdiene og egenvektorene i oppgave 7a). Hvis vi setter disse opp i matrisen P får vi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som gir oss

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

som er en diagonalmatrise hvor elementene er egenverdiene til A.

10.10. Vi regner ut det karakteristiske polynomet som vanlig og får

$$\lambda^2 - 8\lambda = \lambda(\lambda - 8)$$

som betyr at egenverdiene er 0 og 8.

10.11. Vi antar at A har egenverdi λ. Dette betyr at det finnes en $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ slik at

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Multipliser begge sidene av ligningen med A for å få

$$A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}).$$

Vi kan flytte på paranteser, dra ut konstanter og bruke at $\mathbf{v}$ er en egenverdi til A for å se at

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v}) = \lambda(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}.$$

Siden $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ betyr dette at λ^2 er en egenverdi til matrisen A^2.

10.12. Vi setter som vanlig opp matrisen

$$T_\theta - \lambda I = \begin{bmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{bmatrix}$$

og beregner determinanten

$$\det(T_\theta - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1.$$

Ved nå å bruke abc-formelen får vi at

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm 2\sqrt{\cos^2\theta - 1}}{2}$$

som blir

$$\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

Vi har ikke antatt noe om θ som ikke gjelder for 2θ, så $T_{2\theta}$ sine egenverdier er

$$\lambda = \cos(2\theta) \pm i\sin(2\theta)$$

10.13. For en $n \times n$-matrise A finner vi egenverdiene ved å løse ligningen $\det(\lambda I - A) = 0$ der I er $n \times n$ identitetsmatrisen. For hver egenverdi λ finner vi tilhørende egenvektor ved å løse matriseligningen $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. I hver deloppgave vil vi liste opp alle egenverdiene, med tilhørende egenvektorer i samme rekkefølge som egenverdiene.

a) Egenverdier: 3, -1.
Egenvektorer: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Egenverdier: 3, -1, 0.
Egenvektorer: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Egenverdi: 0.
Egenvektor: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

d) Egenverdier: 3, 3, 8.
Egenvektorer: $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

10.14.

a) Det karakteristiske polynomet er $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$. Denne har ingen reelle nullpunkt, for hvis x er reell er $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$.

b) Matrisen roterer vektorer med -90 grader. Men dersom $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$ for en reell c, skalerer A vektoren $\mathbf{x}$ med en faktor c uten at $\mathbf{x}$ roteres.

10.15.

a) Hvis vi roterer vektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ med θ radianer vil vektoren havne et sted langs enhetssirkelen, med koordinater $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$. Hvis vi roterer $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ med θ radianer vil vi havne på et punkt på enhetssirkelen med koordinatene $\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$.

b) Matrisen er akkurat den som har svaret i del **a)** som kolonner:

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

c) Matrisen T_0, som roterer med 0 radianer, har egenverdien 1. Denne matrisen er bare identitetsmatrisen I_2. Matrisen T_π roterer hele planet en halv omdreining og sender derfor enhver vektor $\mathbf{v}$ til vektoren $-\mathbf{v}$. Denne matrisen har egenverdien -1. Dermed får vi også egenverdien 1 ved å velge en hvilken som helst vinkel på formen $0 + 2\pi n$, og vi får egenverdien -1 ved å velge en hvilken som helst vinkel på formen $\pi + 2\pi n$, der n er et heltall. Hvis vi roterer med en annen vinkel enn πk for et heltall k kan vi ikke få noen egenverdi, fordi vi da sender hver vektor $\mathbf{v}$ til en vektor som ikke ligger på samme linje gjennom origo som $\mathbf{v}$ gjør.

10.16. Hvis c er en egenverdi finnes det – per definisjon – en ikke-null vektor $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$. Siden $0 = A - A^2$ er:

$$0 = A(I - A)\mathbf{x} = A(\mathbf{x} - c\mathbf{x}) = c\mathbf{x} - c^2\mathbf{x} = (c - c^2)\mathbf{x}.$$

Ettersom $\mathbf{x}$ ikke er null-vektoren, må en komponent i $\mathbf{x}$ ikke være lik null, og derfor må $c^2 - c = 0$. Dette er en andregradslikning med løsninger $c = 0$ og $c = 1$.

Eksamensoppgaver

Kont 2018: Oppgave 6
Vår 2018: Oppgave 6
Vår 2019: Oppgave 7