TMA4115 Matematikk 3

Innlevering 7

Frist: onsdag 24. april kl. 21:00.

Oppgaver til kapittel 14

1. Omformulér følgende andreordens differensialligninger til førsteordenssystem:

a) $y''(t) - y(t) = 0$

b) $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 0$

c) $2y''(t) - y'(t) = 3t \sin t$

2. Finn generell løsning til ligningene

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$

b) $y'' - 2y' + y = \cos t$

c) $y'' - y' - 2y = \mathrm{e}^{2t}$

d) $y'' + 3y = 5 + 3t^2$

e) $y'' + y' - 2y = 6t\mathrm{e}^{-2t} + 10 \sin t$

Hvordan kan du sjekke at du har regnet riktig?

3. Løs initialverdiproblemene

a) $y'' + 6y' + 5y = \mathrm{e}^{-t} + 1,$
$y(0) = \frac{1}{5}, \quad y'(0) = 0$

b) $y'' + y' + y = t,$
$y(0) = -2, \quad y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1 + 2\mathrm{e}^{-\pi/(2\sqrt{3})}$

4. Vis at $y(x) = c_1 \frac{\ln x}{x} + c_2 \frac{1}{x}$ er en løsning til differensialligningen

$$x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0,$$

som er et eksempel på differensialligninger med variable koeffisienter kalt Cauchy–Euler-ligningene.

5. Den frie bevegelsen i et masse–fjær-system kan for enkelthets skyld modelleres som

$$y'' + \omega_0^2 y = 0,$$

hvor ω_0 er den naturlige svingningsfrekvensen til systemet. Én dag blir systemet påvirket av en ytre, periodisk kraft med frekvens ω:

$$y'' + \omega_0^2 y = A \cos(\omega t),$$

Her er A et mål på styrken til kraften og vi kan anta at masse–fjær-systemet var i ro innledningsvis, dvs.

$$y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 0.$$

a) Finn løsningen $y(t)$ uttrykt ved A, ω_0 og ω.

b) La $\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ og $\delta = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)$ og skriv løsningen på formen

$$y(t) = C \sin(\delta t) \sin(\overline{\omega} t)$$

ved hjelp av en trigonometrisk addisjonsformel, hvor C må bestemmes.

c) Skissér løsningen når $A = 21$, $\omega_0 = 11$ og $\omega = 10$. Hva observerer du?

d) Hvordan ser løsningen ut når $\omega = \omega_0$ i modellen? Fysisk kaller vi dette resonans.

Noen tallsvar

2. a) $y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \mathrm{e}^{-2t}$

b) $y(t) = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{2} \sin t$

c) $y(t) = \left(c_1 + \frac{1}{3}t\right)\mathrm{e}^{2t} + c_2 \mathrm{e}^{-t}$

d) $y(t) = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t) + 1 + t^2$

e) $y(t) = c_1 \mathrm{e}^{t} + (c_2 - \frac{2}{3}t - t^2)\mathrm{e}^{-2t} - 3 \sin t - \cos t$

3. a) $y(t) = \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-t}\left(4t - 1 + \mathrm{e}^{-4t}\right) + \frac{1}{5}$

b) $y(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\left(2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + t - 1$

5. b) $C = A/(2\overline{\omega}\delta)$