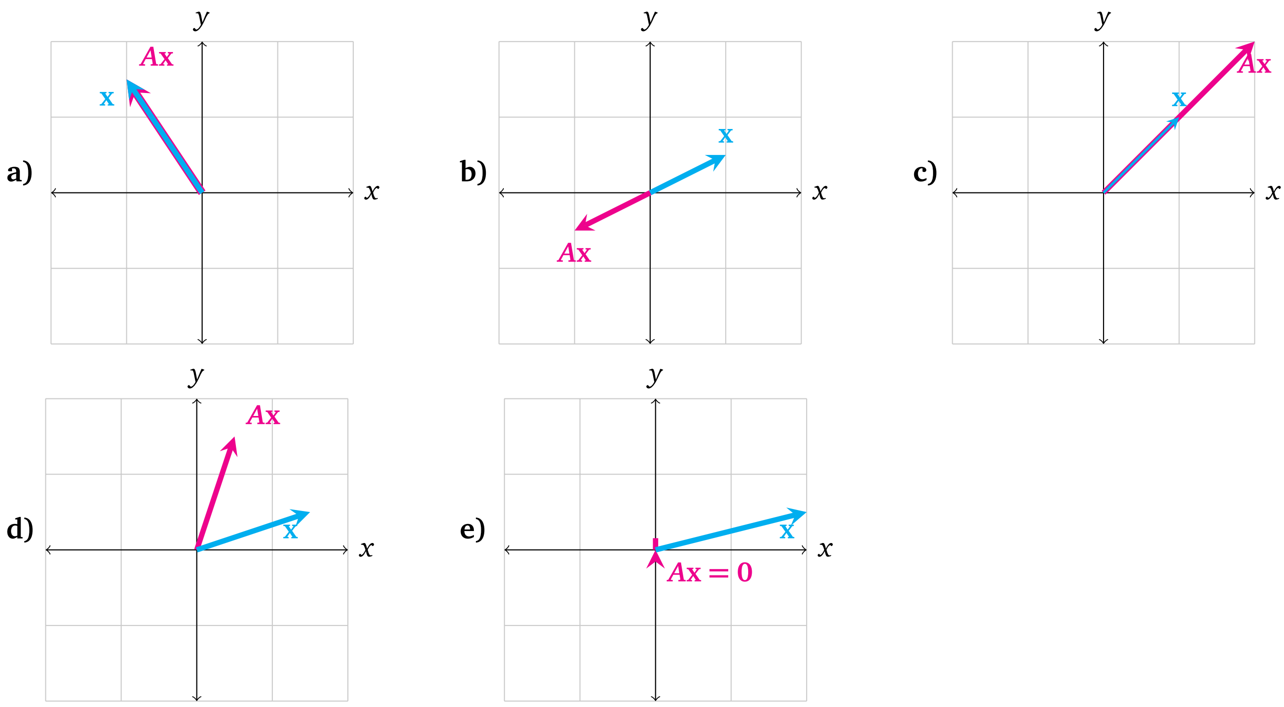
TMA4115 Matematikk 3

Innlevering 5

Frist: Onsdag 20. mars kl. 21:00.

Oppgaver til kapittel 10

1. La A være en 2×2-matrise og $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$. Avgjør om $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor i hvert av tilfellene **a)–e)** nedenfor og bestem i så fall tilhørende egenverdi.



2. Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til følgende matriser:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & i & i \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Vi ser på egenverdiene til matrisene i deloppgavene **2 a)** og **2 b)**. Bestem egenrommet, geometrisk multiplisitet og algebraisk multiplisitet.

4. La A være en 6×6-matrise slik at rangen til A er 3.

a) Er 0 en egenverdi til A? Hvis ja, oppgi de mulige verdiene for dens algebraiske multiplisitet når:
i. A har to ulike egenverdier.
ii. A har fire ulike egenverdier.

b) Finn den algebraiske multiplisiteten til 0 slik at A er altid diagonaliserbar i del **4(a)(i)** og i del **4(a)(ii)**.

5. I en sammenheng får du høre at noen har regnet ut at de komplekse egenverdiene til en reell 5×5-matrise er

$$3, \quad 2 \pm 4i, \quad \sqrt{7} \quad \text{og} \quad 6 - i.$$

Kan det stemme? Begrunn svaret.

6. La A være en kvadratisk matrise.

a) Vis at hvis matrisen A^2 er nullmatrisen, så er 0 den eneste egenverdien til A.

b) Gi et eksempel på en matrise A slik at 0 er den eneste egenverdien til A, men A^2 ikke er nullmatrisen.

c) La A være en 2×2-matrise. Vis at hvis 0 er den eneste egenverdien til A, så er A^2 nullmatrisen. *(**Hint**: benytt den karakteristiske ligningen til en generell 2×2-matrise)*

d) Anta at A^2 er nullmatrisen. Vis at 0 er en egenverdi til A. *(**Hint**: benytt Teorem 10.4)*

Oppgaver til kapittel 11

7. Bruk resultatene fra oppgave **3** til å bestemme om matrisene i deloppgavene **2 a)** og **2 b)** er diagonaliserbare eller ikke.

8. Ola har diagonalisert en matrise A som

$$A = PDP^{-1}$$

med

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

mens Kari endte opp med

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Kan begge ha rett? Begrunn svaret uten å regne ut A.

9. Finn følgende matrisers egenverdier og tilhørende egenvektorer. Avgjør så om matrisene er diagonaliserbare:

a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2i & 3 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. Matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

har egenverdiene -1, 0 og 1.

a) Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $B = PDP^{-1}$.

b) Regn ut B^{2101}.

11. La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen mellom andregradspolynom gitt ved

$$T(f) = (2x^2+1)f''(x) - f(x).$$

a) Bestem matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$ og finn egenverdiene til A.

b) Finn egenvektorene til A. Er A diagonaliserbar?

12. I denne oppgaven skal vi se nærmere på Teorem 11.18, som sier at en symmetrisk, reell $n \times n$-matrise A er ortogonalt diagonaliserbar. Vi ser her på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A. Justér lengden til egenvektorene slik at de har lengde lik 1.

b) Diagonalisér A ved å finne en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P.

c) Vis at egenvektorene til ulike egenverdier av A faktisk er ortogonale.

d) Hva blir $P^\top P$ lik? Og dermed P^{-1}?

Konklusjonen vi kan trekke fra denne oppgaven er at for den reelle symmetriske matrisen A gitt over, kan vi skrive diagonaliseringen som

$$A = PDP^\top,$$

hvor P er en orthogonal matrise bestående av parvis ortonormale egenvektorer av A, og D er diagonalmatrisen bestående av dens egenverdier. Dette holder generelt for alle reelle symmetriske matriser A. Sammenlign dette med tilfellet når A kun er en diagonliserbar matrise, og ikke nødvendigvis reell og symmetrisk.

Noen tallsvar

2. Egenverdier:

a) -1 og 3 **b)** 0 og 2

c) 0, 1 og $i-1$ **d)** 1 og 3

9.

a) $\lambda = 0$: $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$; $\lambda = \sqrt{2}\mathrm{i}$: $\left\{ \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$;

$\lambda = -\sqrt{2}\mathrm{i}$: $\left\{ \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

10. $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

11. a) Egenverdier: -1 og 3

12. a) Egenverdier: -2, 1, og 2