TMA4115 Matematikk 3

Innlevering 4

Frist: 6. mars kl. 21:00.

Oppgaver til kapittel 9

1. Avgjør om vektorene

$$\begin{bmatrix}2\\8\\4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\quad \text{og}\quad \begin{bmatrix}2\\-5/2\\4\end{bmatrix}$$

står ortogonalt på hverandre og finn deretter ut om de er lineært uavhengige.

2. Beregn den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix}5\\2\\7\end{bmatrix}$ ned på underrommet $\mathrm{Sp}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\}$ i $\mathbb{R}^3$.

3. La

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}4\\-2\\0\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.$$

a) Beregn $P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})$.

b) Hva blir $P_{\boldsymbol{v}}\big(P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})\big)$ lik?

c) Finn ut hva som er minste avstand mellom $\boldsymbol{u}$ og $\mathrm{Sp}\{\boldsymbol{v}\}$ i $\mathbb{R}^3$.

d) Hva er $\dim(\mathrm{Sp}\{\boldsymbol{v}\})^{\perp}$?

4. La $W = \mathrm{Sp}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ hvor

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix} \text{ og } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}4\\-4\\2\end{bmatrix}$$

a) Finn en ortogonal basis for W.

b) Regn ut standardmatrisen $[P_W]$ til den ortogonale projeksjonen $P_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ned på W.

c) Finnes det en 3×2–matrise A slik at $[P_W]A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$? I så fall, finn den. *Hint*: Tenk geometrisk her.

5. La U være underrommet i $\mathbb{R}^4$ utspent av vektorene

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}.$$

a) Lag en ortogonal basis for U ved hjelp av Gram–Schmidts metode.

b) Finn standardmatrisen $[P_U]$ til den ortogonale projeksjonen $P_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ned på U.

c) Hva er $\dim U^{\perp}$?

d) Finn en basis for det ortogonalet komplementet $U^{\perp}$ til U i $\mathbb{R}^4$.

6. Vi ser på vektorrommet $\mathcal{C}[0,1]$ av kontinuerlige funksjoner $[0,1] \to \mathbb{R}$ med indreprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Avgjør om funksjonene x og $\dfrac{1}{x^2+1}$ er ortogonale i $\mathcal{C}[0,1]$.

b) Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Sp}\{1, x^2, x^4\}$.

c) Beregn lengden $\left\| \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right\|$.

Vink: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan(x) + C$.

7. Vi ser på indreproduktrommet $\mathcal{C}[0,1]$ av kontinuerlige funksjoner over $[0,1]$, altså kontinuerlige funksjoner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

a) Regn ut vinkelen mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken vinkel er minst?

b) Regn ut avstanden mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken avstand er minst? *Hint*: Husk at avstanden mellom to vektorer f og g er lengden til $f - g$.

c) Skissér x, $\cos x$ og $\sin x$ på intervallet $[0,1]$. Gi en geometrisk forklaring på de numeriske verdiene du fant i del **a)–b)**.

8. La Q være en såkalt *ortogonal* $n \times n$-matrise definert utifra at kolonnene utgjør en *ortonormal* basis for $\mathbb{R}^n$.

a) Regn ut $Q^{\top}Q$ og bestem Q^{-1}.

b) Vis at mulige verdier til $\det Q$ er bare ± 1.

9. La U være en delmengde av et indreproduktrom V. er et underrom av V.
Vis at det ortogonale komplementet

$$U^{\perp} = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \ : \ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = 0 \text{ for alle } \boldsymbol{u} \in U \right\}$$

Noen tallsvar

3. c) $\sqrt{20}$

5. a) $\{\boldsymbol{u}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\top}\}$ **b)** $\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\top}$ og $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\top}$

6. c) $\sqrt{\pi}/2$