TMA4115 Matematikk 3

Innlevering 3

Frist: 21. februar kl. 21:00.

Oppgaver til kapittel 7

1. Fra vektorromsaksiomene følger det at $0 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ for alle vektorer $\boldsymbol{u}$. Hva er generelt forskjellen på 0 og $\boldsymbol{0}$? Gi et eksempel.

2. Avgjør om følgende delmengder i $\mathbb{R}^2$ er underrom av $\mathbb{R}^2$.

a) Alle x, y slik at $x + y = 0$.

b) Alle x, y slik at $x + y = 1$.

c) $\mathbb{Q}^2$

3. La $\mathcal{M}_n$ utgjøre vektorrommet av komplekse $n \times n$-matriser og vis at mengden

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ for } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n \right\}$$

av nedre triangulære $n \times n$-matriser er et underrom av $\mathcal{M}_n$.

4. Avgjør om vektoren $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ ligger i $\operatorname{Null} A$ når

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Hva er dimensjonen til $\operatorname{Col} A$?

5. Finn en basis for kolonnerommet, nullrommet og radrommet til følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 21 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -7 & -1 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -9 & 8 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Bestem også dimensjonen til hvert av disse rommene for begge matrisene.

6.

a) Finn en basis for $\mathcal{P}_2$. Vis at det er en basis.

b) Hva er koordinatene til $1 + 2x + 3x^2$ i basisen du fant for $\mathcal{P}_2$?

c) Finn en basis for $\mathcal{P}_n$, der $n \geqslant 0$.

7. La A være en 4×5-matrise. Begrunn svarene på følgende spørsmål.

a) Hva er maksimal mulig dimensjon til $\operatorname{Col} A$?

b) Hvis $\dim \operatorname{Null} A = 3$, hva er antall lineært uavhengige kolonner i A?

c) Hvis $A \neq 0$, hva er minste mulige antall lineært uavhengige rader i A?

d) Hva er $\dim \operatorname{Row}(A^\top)$ når systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har 2 frie parametre?

e) Kan $\operatorname{Null} A = \{\boldsymbol{0}\}$?

8. *Frivillig:* La V være et vektorrom. Kriteriet for at en delmengde $U \subseteq V$ er et underrom av V er at U er lukket under addisjon (definert på samme måte som i V), lukket under skalarmultiplikasjon (som i V) og inneholder nullvektoren $\boldsymbol{0}$ til V. Begrunn følgende spørsmål:

a) Som et alternativ til å undersøke om U er lukket under addisjon og multiplikasjon hver for seg, vil det være slik at den mer kompakte betingelsen at

$$c\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$$

for alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ og skalarer c er like god (det vil si, ekvivalent)?

b) Kan vi bytte ut betingelsen $\boldsymbol{0} \in U$ med at U bare må være en ikke-tom mengde?

Oppgaver til kapittel 8

9. Du får oppgitt at $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er en lineærtransformasjon hvor

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Finn

a) $T\left(\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}\right)$ **b)** standardmatrisen til T

c) ut om T er injektiv og/eller surjektiv.

10. Gitt funksjonene

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = 3x_1 + 2x_2 \quad \text{og} \quad R(x) = \begin{bmatrix}x\\-x\\4x\end{bmatrix}$$

fra henholdsvis $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^3$, bestem standardmatrisen til $R \circ T$ og kjernen til T.

11. To mulige basiser for $\mathbb{R}^2$ er

$$\mathscr{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}\right) \quad \text{og} \quad \mathscr{C} = \left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right).$$

Regn ut matrisen som beskriver basisskiftet fra $\mathscr{C}$ til $\mathscr{B}$.

12. La $T: V \to W$ være en lineærtransformasjon mellom to vektorrom. Vis at T sender underrom av V til underrom av W—altså, hvis U er et underrom av V, vis at $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ er et underrom av W.

(Et av de viktigste eksemplene her er når U er lik $\ker T$, hvorpå T sender alle elementer i U til nullvektoren i W, slik at $T(\ker T) = \{\boldsymbol{0}\}$ er det trivielle underrommet i W.)

13. La $D: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som sender hvert polynom til den deriverte av polynomet:

$$D(p) = p'$$

La $G: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som ganger polynomet den får inn med x:

$$G(p) = q, \quad \text{der } q(x) = x \cdot p(x).$$

a) Vis at D og G er lineærtransformasjoner.

b) Finn bildet og kjernen til D og til G.

c) Finn ut om D og G er injektive og/eller surjektive.

d) Beskriv lineærtransformasjonen $(DG) - (GD)$.

e) Nå begrenser vi oss til endeligdimensjonale polynomvektorrom. For hvert positive heltall n definerer vi lineærtransformasjoner

$$D_n : \mathcal{P}_n \to P_{n-1} \quad \text{og} \quad G_n : \mathcal{P}_{n-1} \to P_n$$

på samme måte som vi definerte D og G. Velg en passende basis for hvert av vektorrommene $\mathcal{P}_2$ og $\mathcal{P}_3$, og finn matrisene for D_3 og G_3 med hensyn på disse basisene.

Noen tallsvar

5.

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 58 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 133 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 65 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

9.

a) $\begin{bmatrix} 17 \\ \frac{26}{5} \\ -5 \end{bmatrix}$