Interaktiv forelesning uke 16

Mer om differensialligninger og repetisjon

Mentimeter

Instructions

Go to

www.menti.com

Enter the code

5570 3026

Or use QR code

3

Agenda

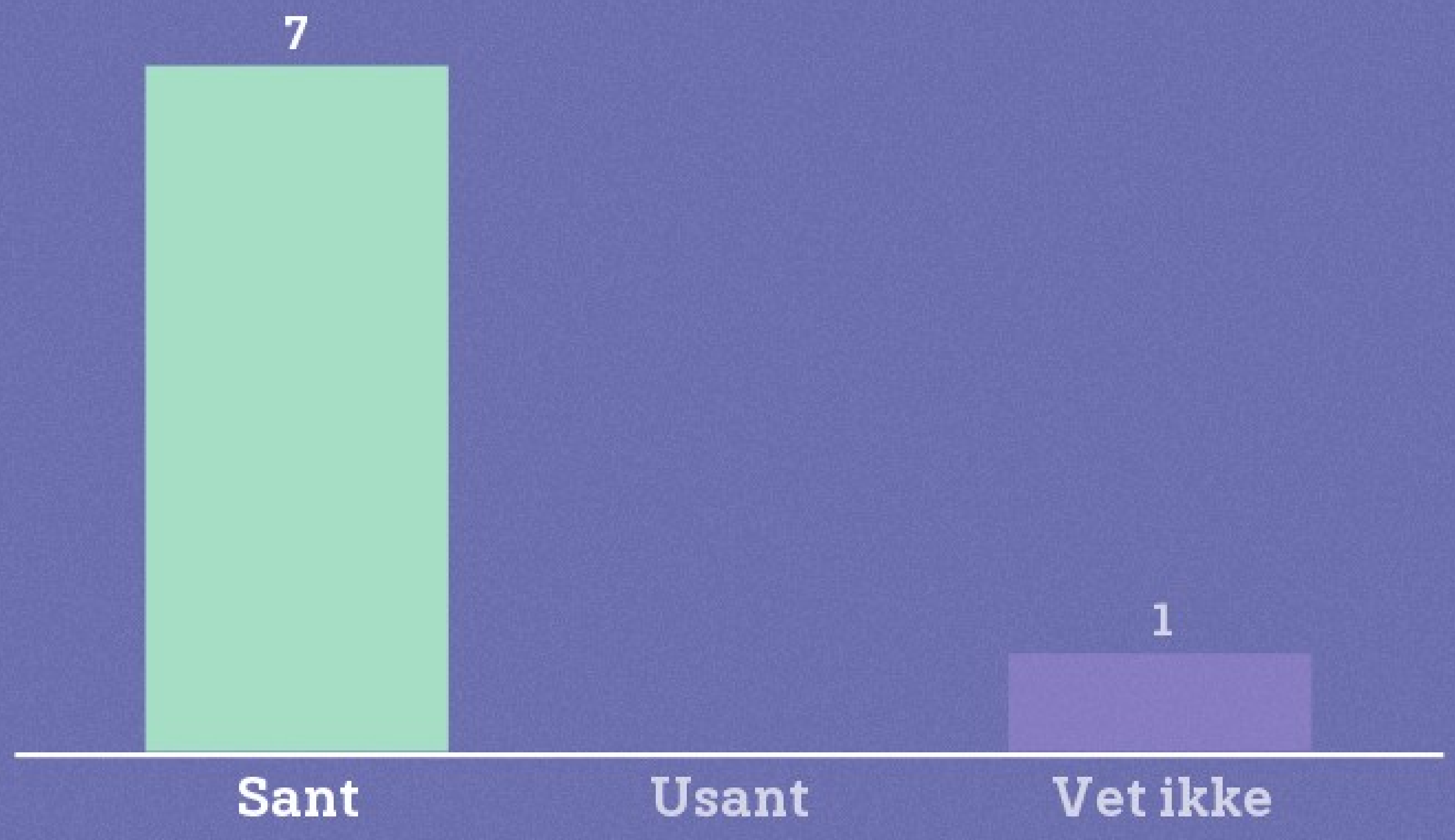
→ Løsning av 2. ordens differensialligninger

→ Repetisjon - oppgaveløsning

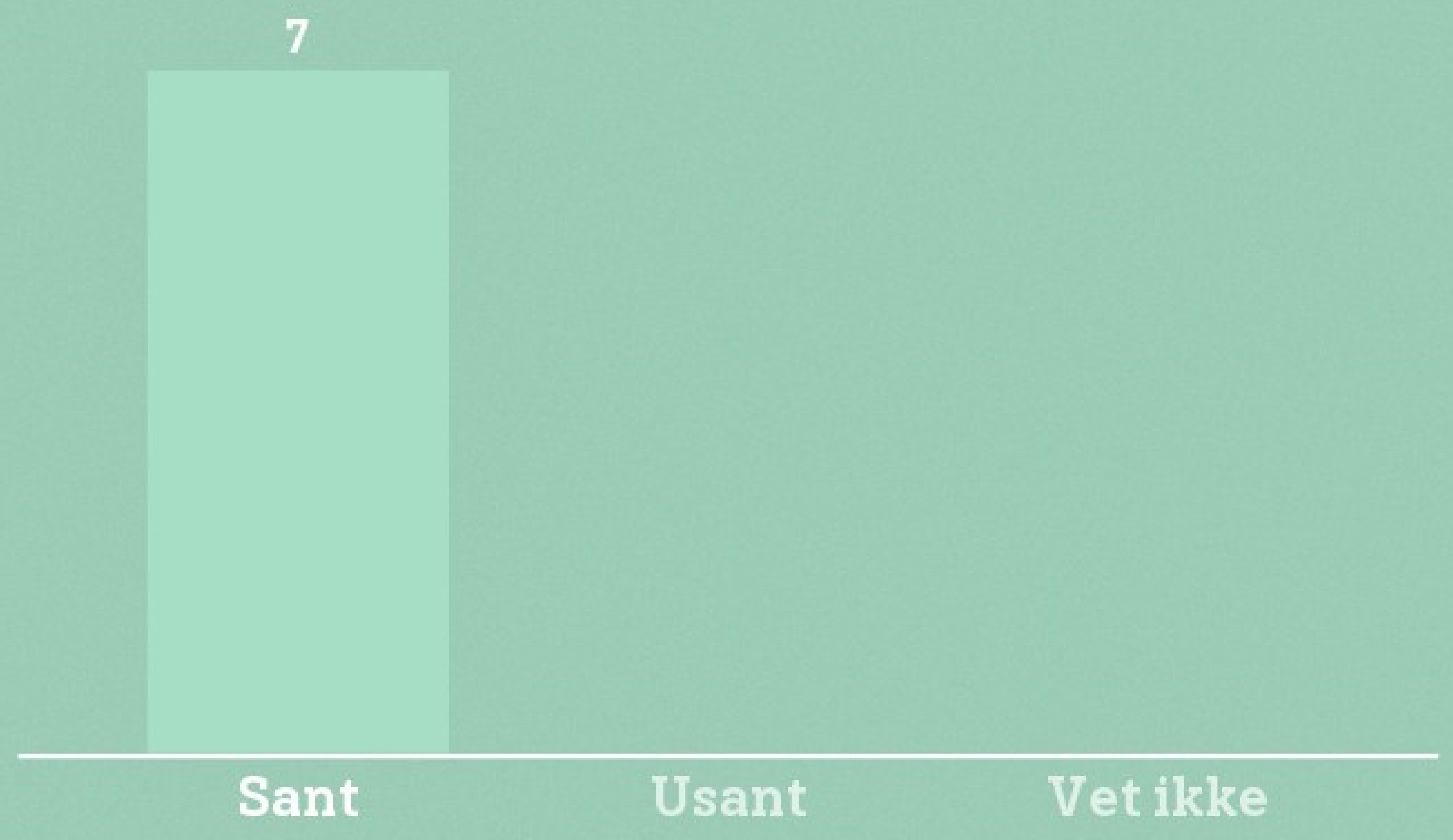
Mentimeter

1. Skriv om $y'' + 5y' + 6y = 0$ til et system av 1. ordens ligninger og finn løsningen som oppfyller $y(0) = y'(0) = 1$

Enhver 2. ordens diff.likning $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ kan skrives om til et 1. ordens system $x' = Ax$ med $A = [[0, 1]; [-a_0, -a_1]]$ og $x = [y; y']$



Den karakteristiske likningen $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ får vi når vi skal finne egenverdier til A.



1. Skriv om $y'' + 5y' + 6y = 0$ til et system av 1. ordens ligninger og finn løsningen som oppfyller $y(0) = y'(0) = 1$

Skriver om til et 1. ordens system $x' = Ax$

med $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$ og løser

karakteristiske likningen $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

slik at $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = -3$.

Finner egenvektorer $v_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}$ og generell

løsning $x = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-3t}$.

Initialbetingelsene gir $c_1 = 4, c_2 = -3$ og

$$y(t) = x_1(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$$

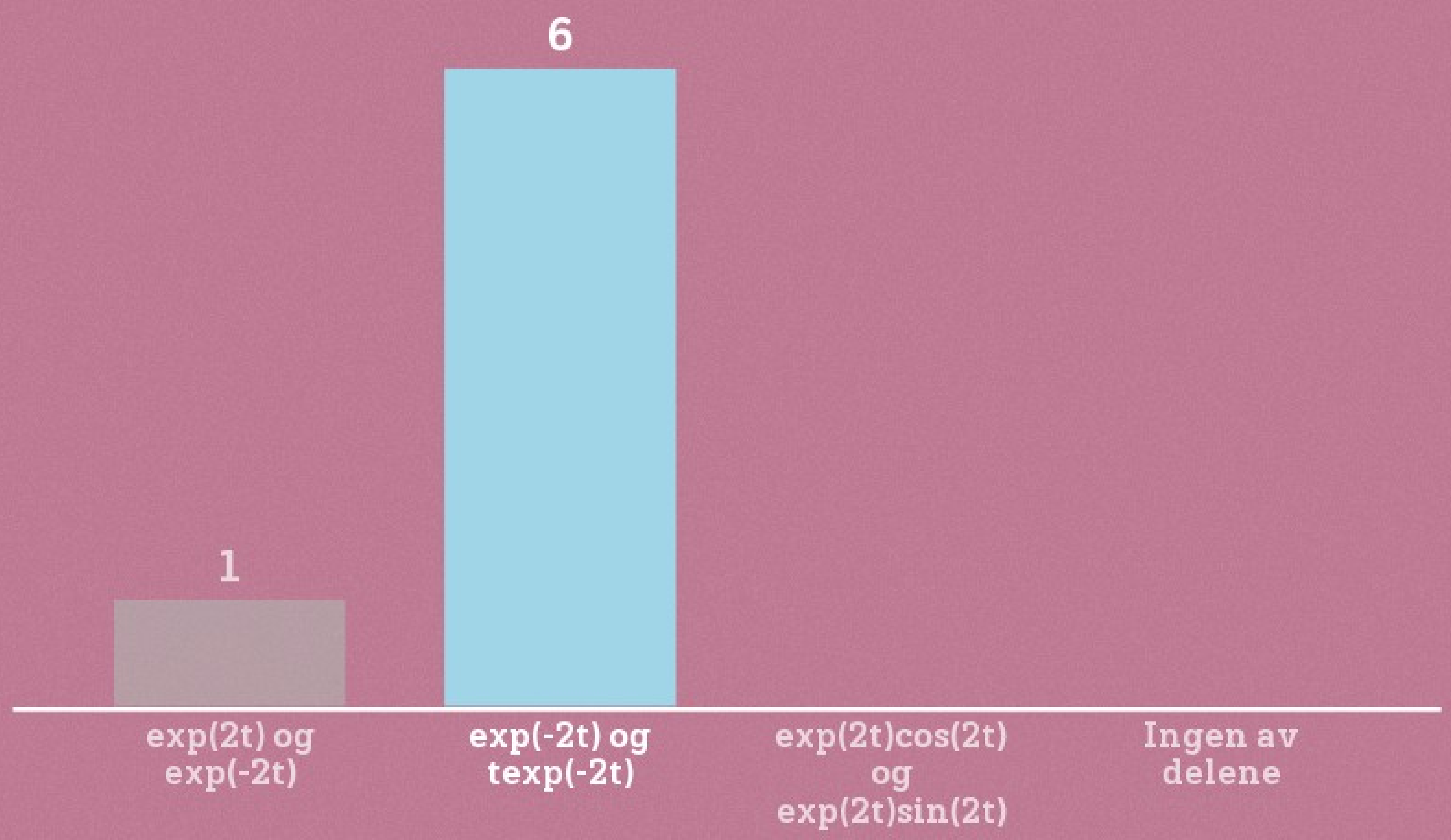
Mentimeter

2. Finn en generell løsning for ligningene og angi en basis for løsningsrommene:

a) $y'' + 4y' + 4y = 0$

b) $y'' + 2y' + 2y = 0$

2a) $y'' + 4y' + 4y = 0$ gir karakteristisk likning $(\lambda + 2)^2 = 0$ og basisen vil være på formen



7

2a) $y'' + 4y' + 4y = 0$

Karakteristisk likning

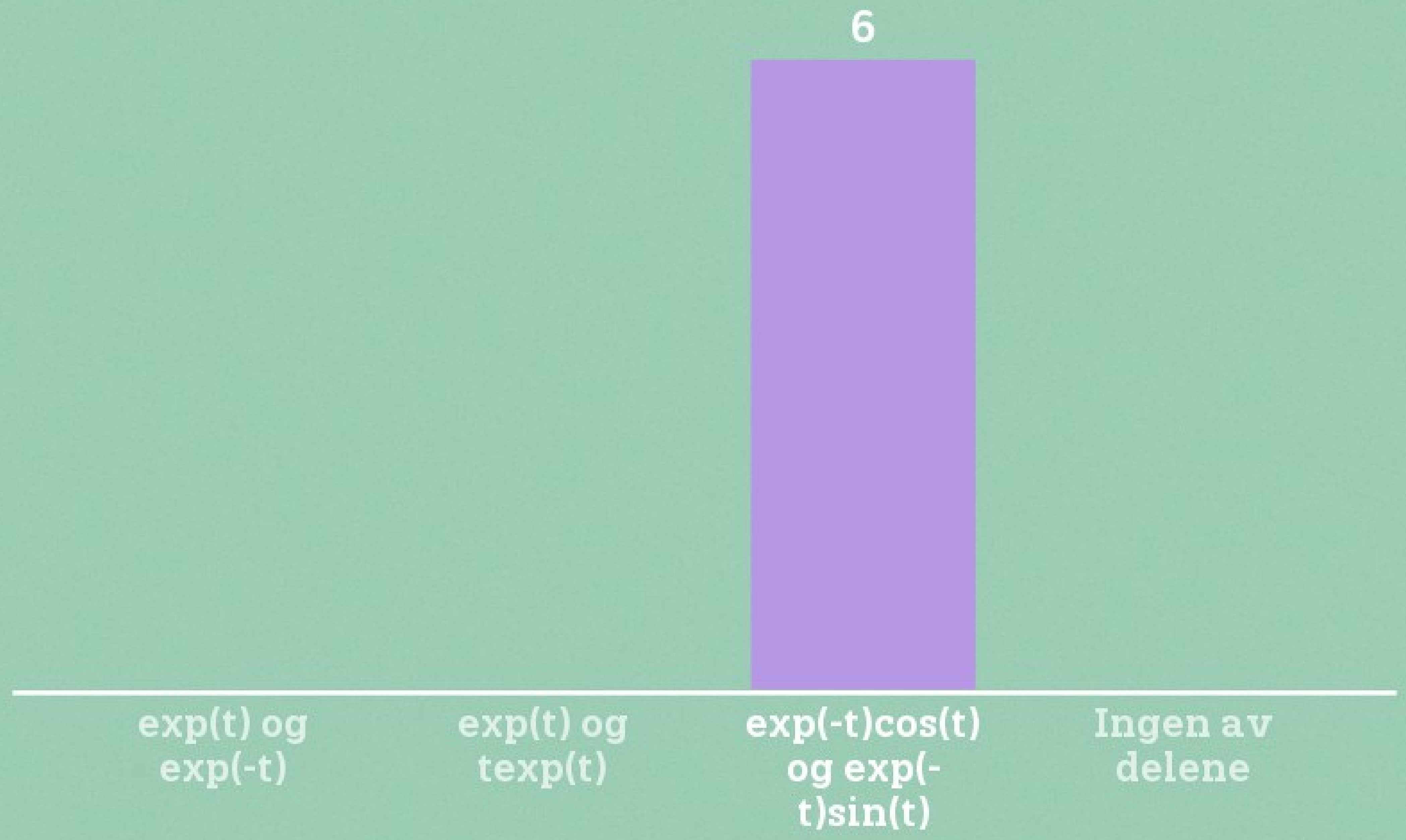
$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ **gir**

$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ **og generell løsning**

$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$ **og basis**

(e^{-2t}, te^{-2t}).

2b) $y'' + 2y' + 2y = 0$ gir karakteristisk likning $(\lambda + 1)^2 + 1 = 0$ og basisen vil være på formen



Mentimeter

2b) $y'' + 2y' + 2y = 0$

Karakteristisk likning

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ **gir**

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ **og generell løsning**

$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t$ **og**

basis $(e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$.

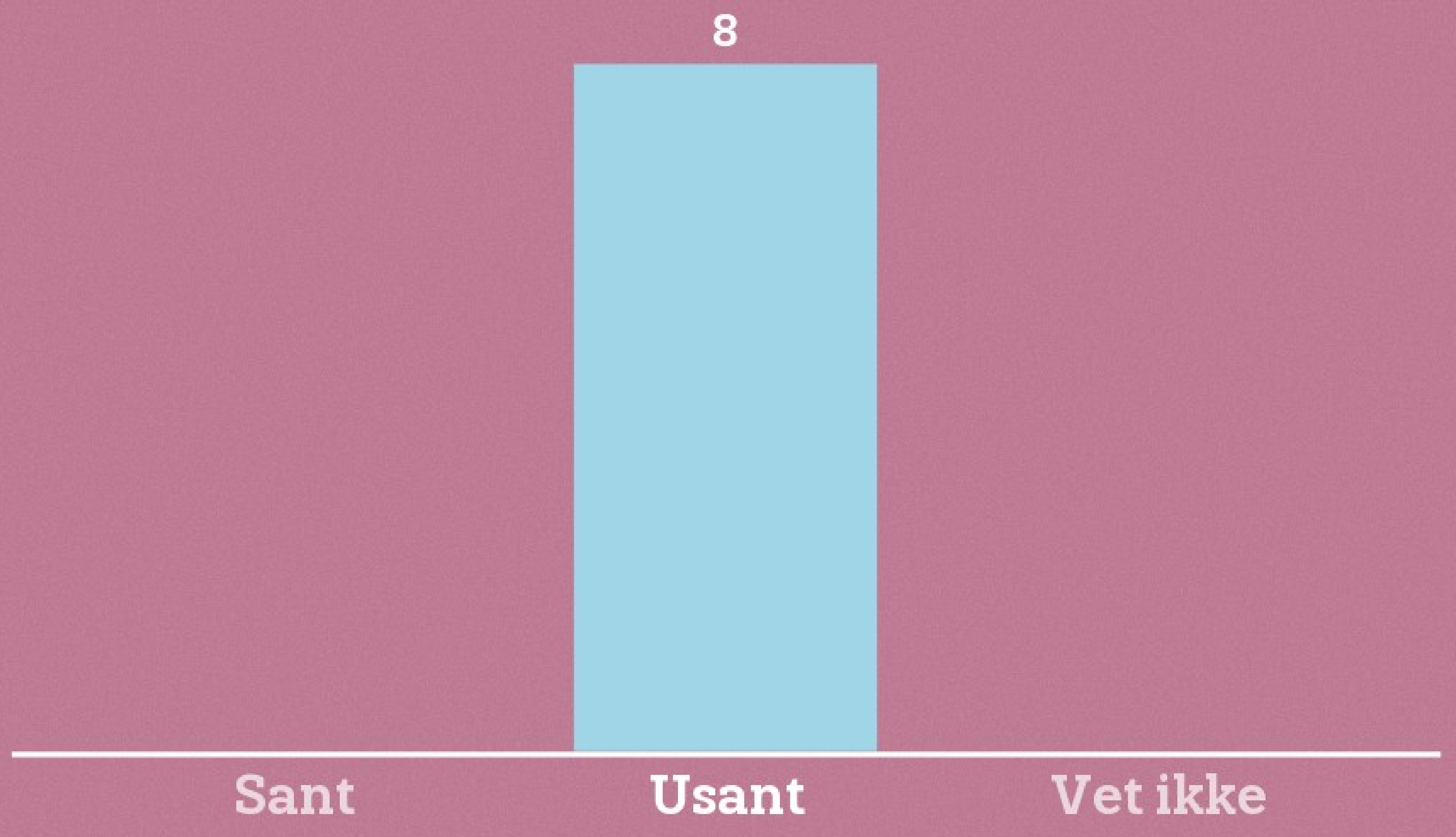
1

3. Finn partikulær løsning til:

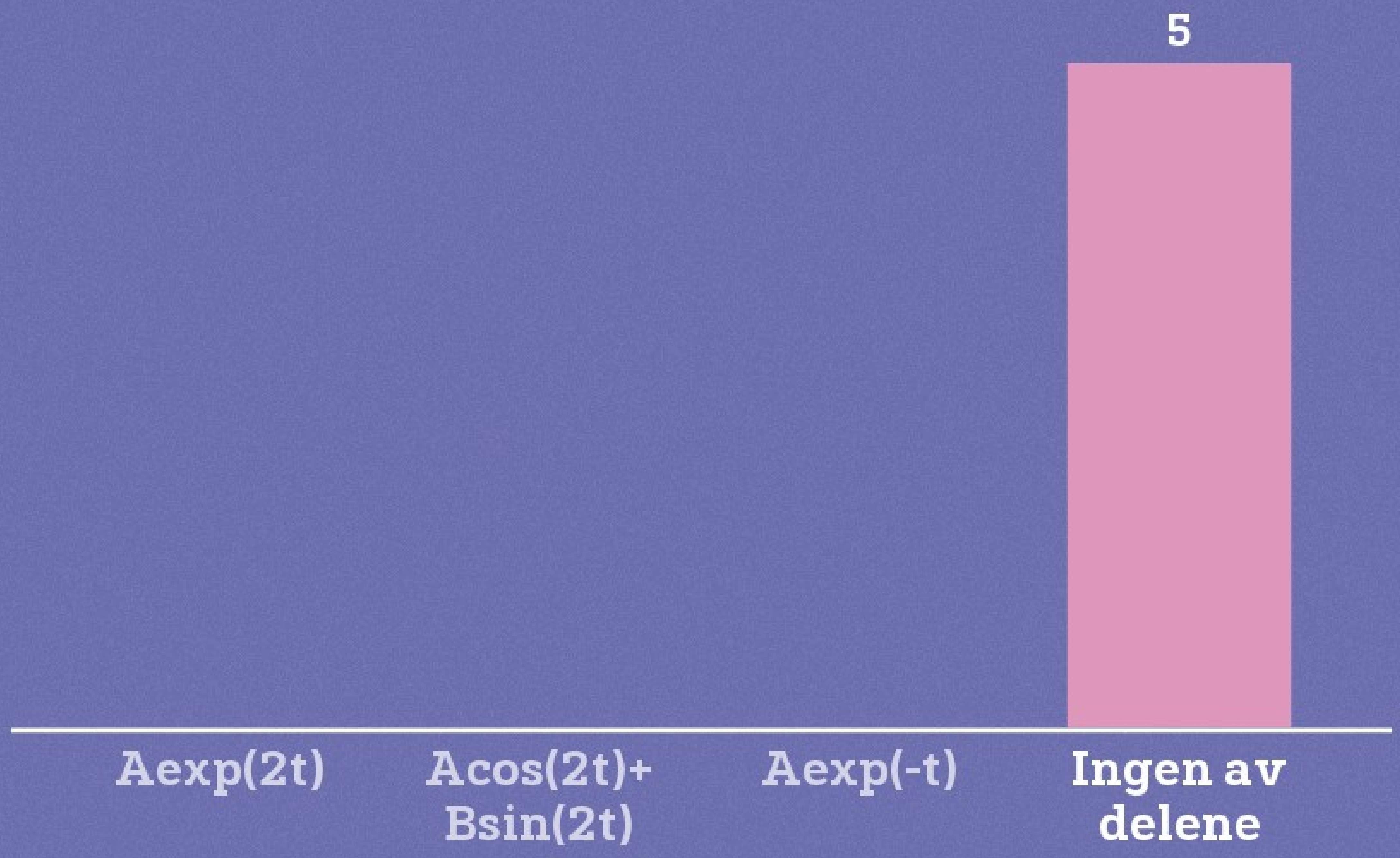
a) $y'' + 4y = e^t$

b) $y'' - y' - 2y = e^{2t}$

3a) $y'' + 4y = 0$ **gir karakteristisk likning** $\lambda(\lambda + 4) = 0$ **og** $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4$ **og løsning** $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t}$



3a) $y'' + 4y = e^t$ med $y_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$ har partikulær løsning



5

Mentimeter

3a) $y'' + 4y = e^t$

Venstre side: $\lambda^2 + 4 = 0$ **gir** $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ **og**

$y_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$.

Høyre side gjetter vi $y_p = Ae^t$.

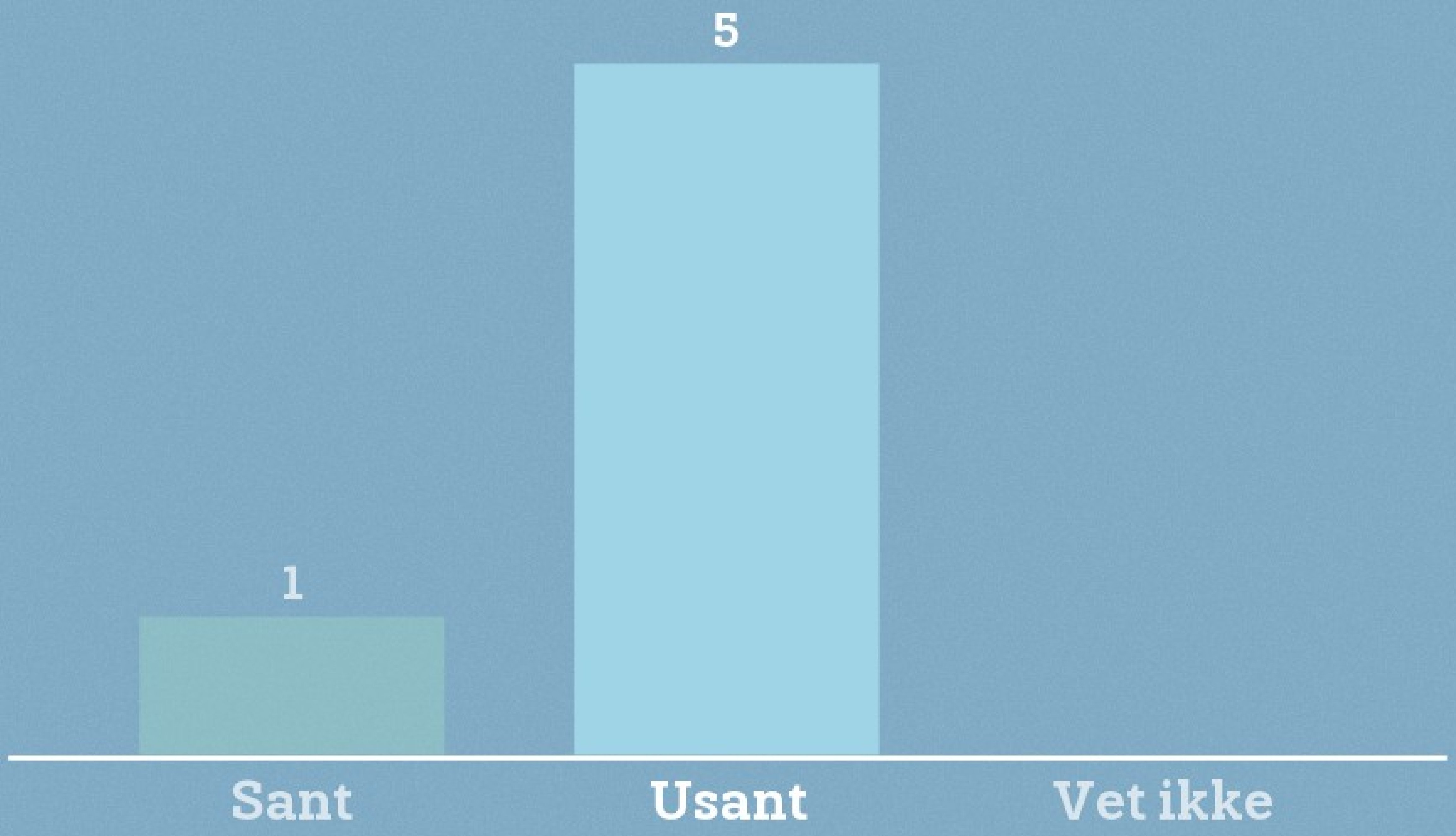
$y_p = y_p' = y_p''$, **insatt gir**

$$Ae^t + 4Ae^t = e^t \Rightarrow A = \frac{1}{5}.$$

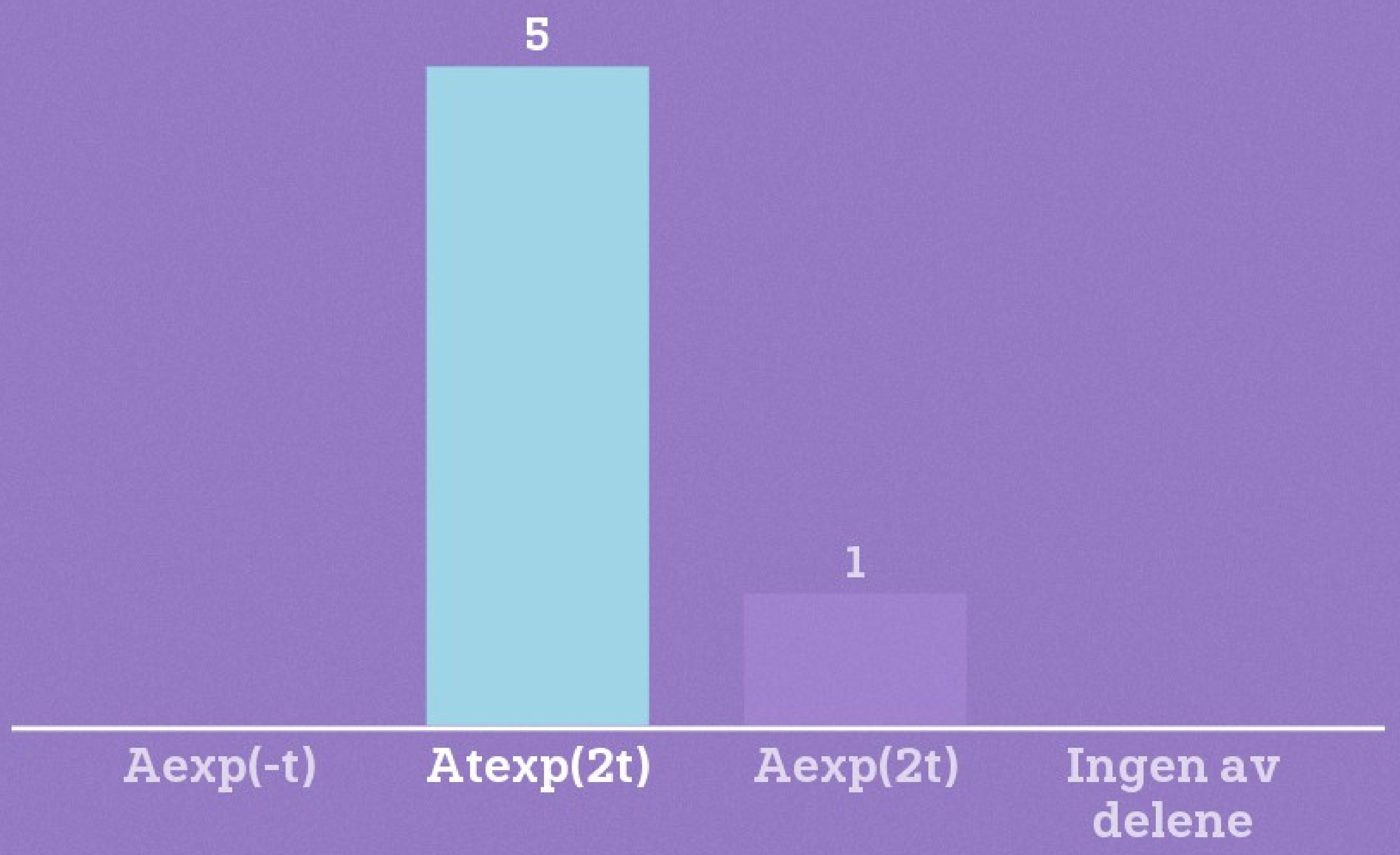
$$y_p = \frac{1}{5}e^t$$

1

3b) $y'' - y' - 2y = e^{2t}$ **gir** $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$ **og** $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ **og løsning** $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$



3b) $y'' - y' - 2y = e^{2t}$ **med** $y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$ **har partikulær løsning**



3b) $y'' - y' - 2y = e^{2t}$

Venstre side: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ **gir** $\lambda_2 = -1, \lambda_2 = 2$
og $y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$.

Høyre side: gjetter $\tilde{y}_p = Ae^{2t}$**, men ser dette er en løsning av** y_h **og ganger med** t**:** $y_p = Ate^{2t}$ **. Da blir**
$y_p' = Ae^{2t} + 2Ate^{2t}$ **og** $y_p'' = 4Ae^{2t} + 4Ate^{2t}$,
innsatt i diff.likningen:

$$(4Ae^{2t} + 4Ate^{2t}) - (Ae^{2t} + 2Ae^{2t}) - 2Ae^{2t} = e^{2t} \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$y_p = \frac{1}{3}te^{2t}$$

1

4. Angi form på partikulær løsning av:

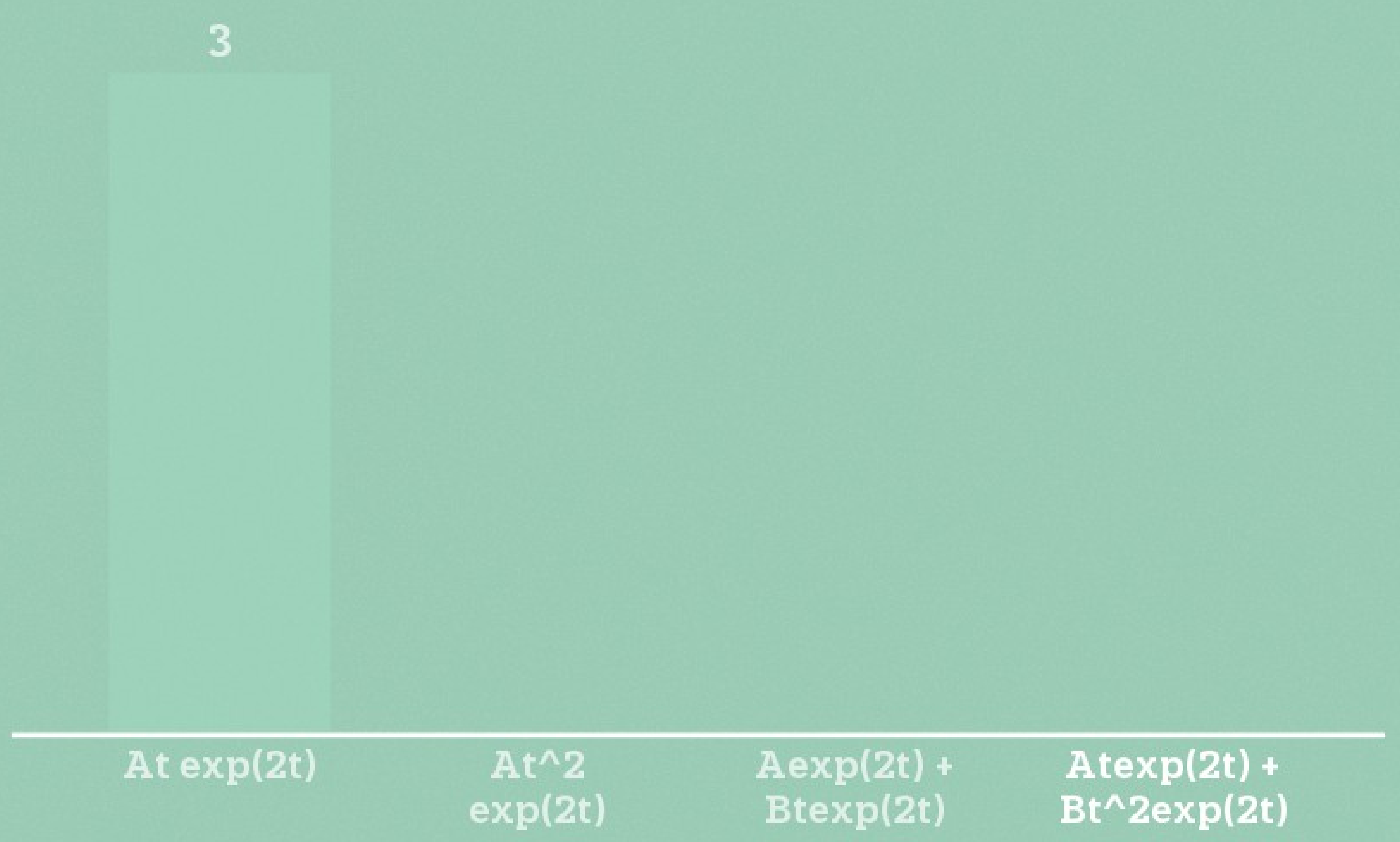
a) $y'' - y' - 2y = te^{2t}$

b) $y'' + y = cos(t)$

c) $y'' + y = sin(t) + 3t^2 + 1$

d) $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t} + te^{3t}$

4a) $y'' - y' - 2y = te^{2t}$ med $y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$ vil gi partikulær løsning



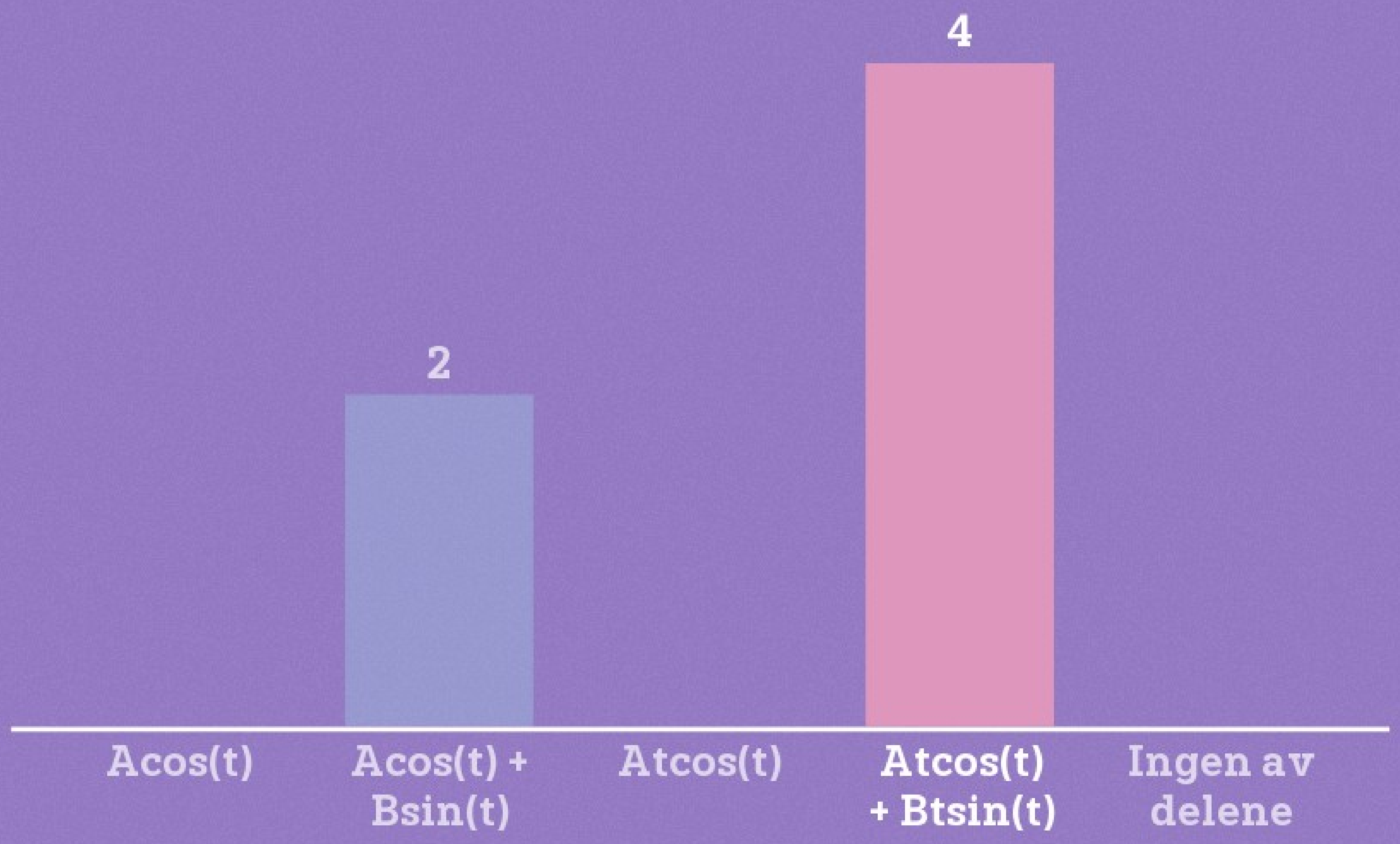
4a) $y'' - y' - 2y = te^{2t}$

Venstre side: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ **gir**
$\lambda_2 = -1, \lambda_2 = 2$ **og**
$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$.

Høyre side: gjetter $(At + B)e^{2t}$**, men må gange med** t **da** $\lambda_2 = 2$**. Dvs**
$y_p(t) = t(At + B)e^{2t}$

4

4b) $y'' + y = cos(t)$ med $y_h(t) = c_1 cos(t) + c_2 sin(t)$ vil gi partikulær løsning

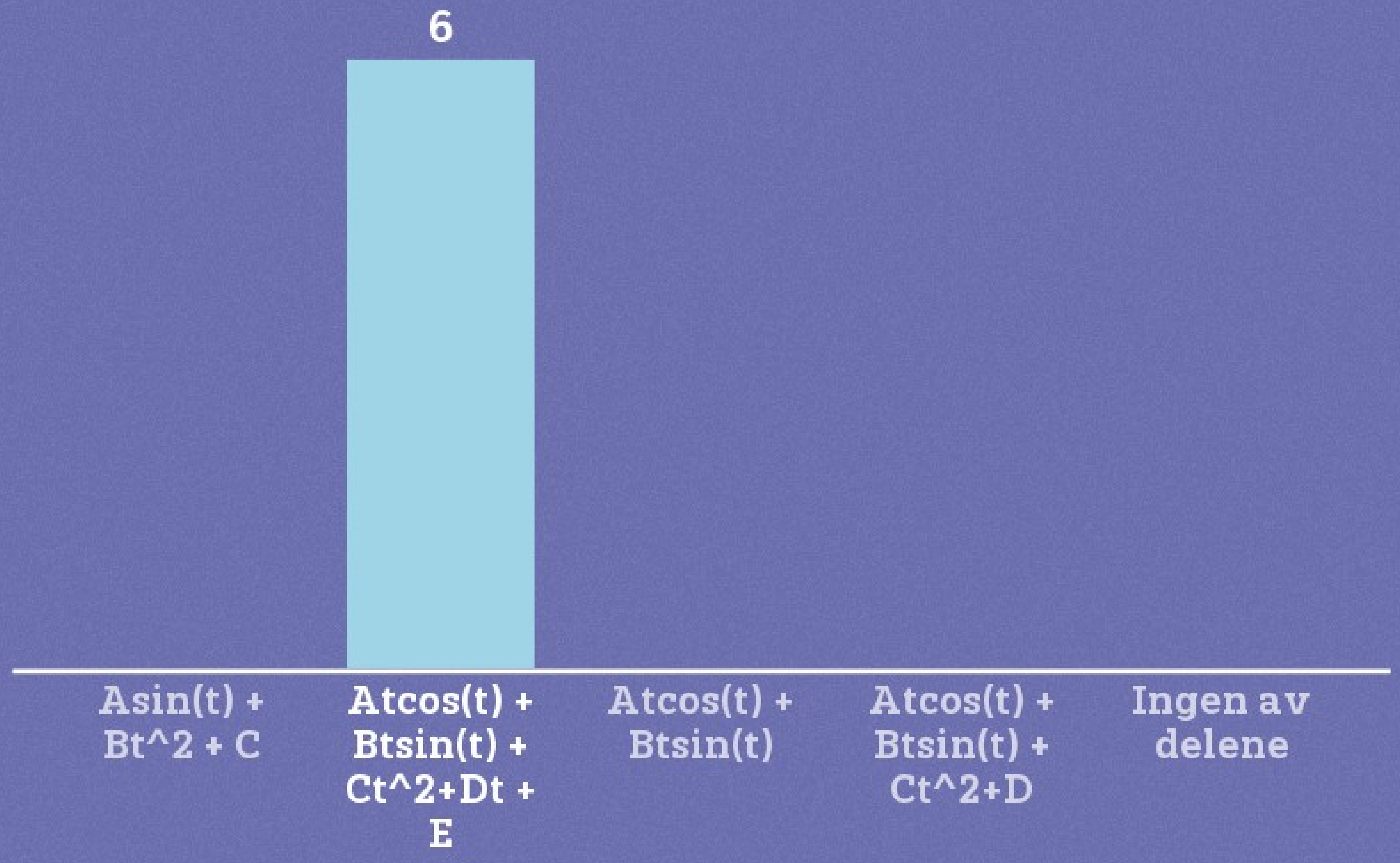


4b) $y'' + y = cos(t)$

Venstre side: $\lambda^2 + 1 = 0$ **gir** $\lambda_{1,2} = \pm i$
og $y_h(t) = c_1 cos(t) + c_2 sin(t)$**.**

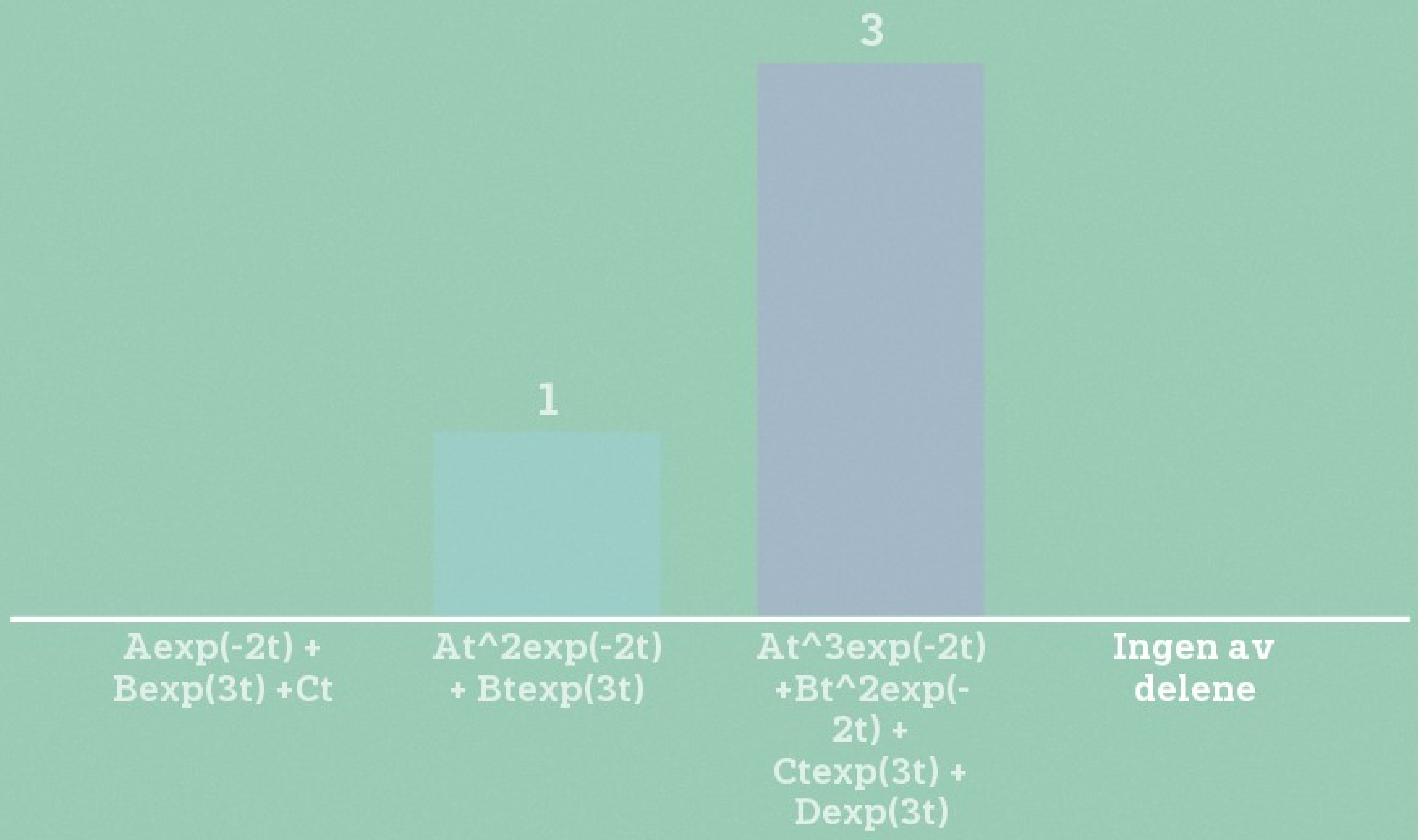
Høyre side: gjetter $Acos(t) + Bsin(t)$**,**
men må gange med t **da dette er en løsning for den homogene likningen. Dvs**
$y_p(t) = t(Acos(t) + Bsin(t))$

4c) $y'' + y = sin(t) + 3t^2 + 1$ med $y_h(t) = c_1 cos(t) + c_2 sin(t)$ vil gi partikulær løsning



Mentimeter

4d) $y'' + 4y' + 4t = t^2 e^{-2t} + te^{3t}$ med $y_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t}$ vil gi partikulær løsning



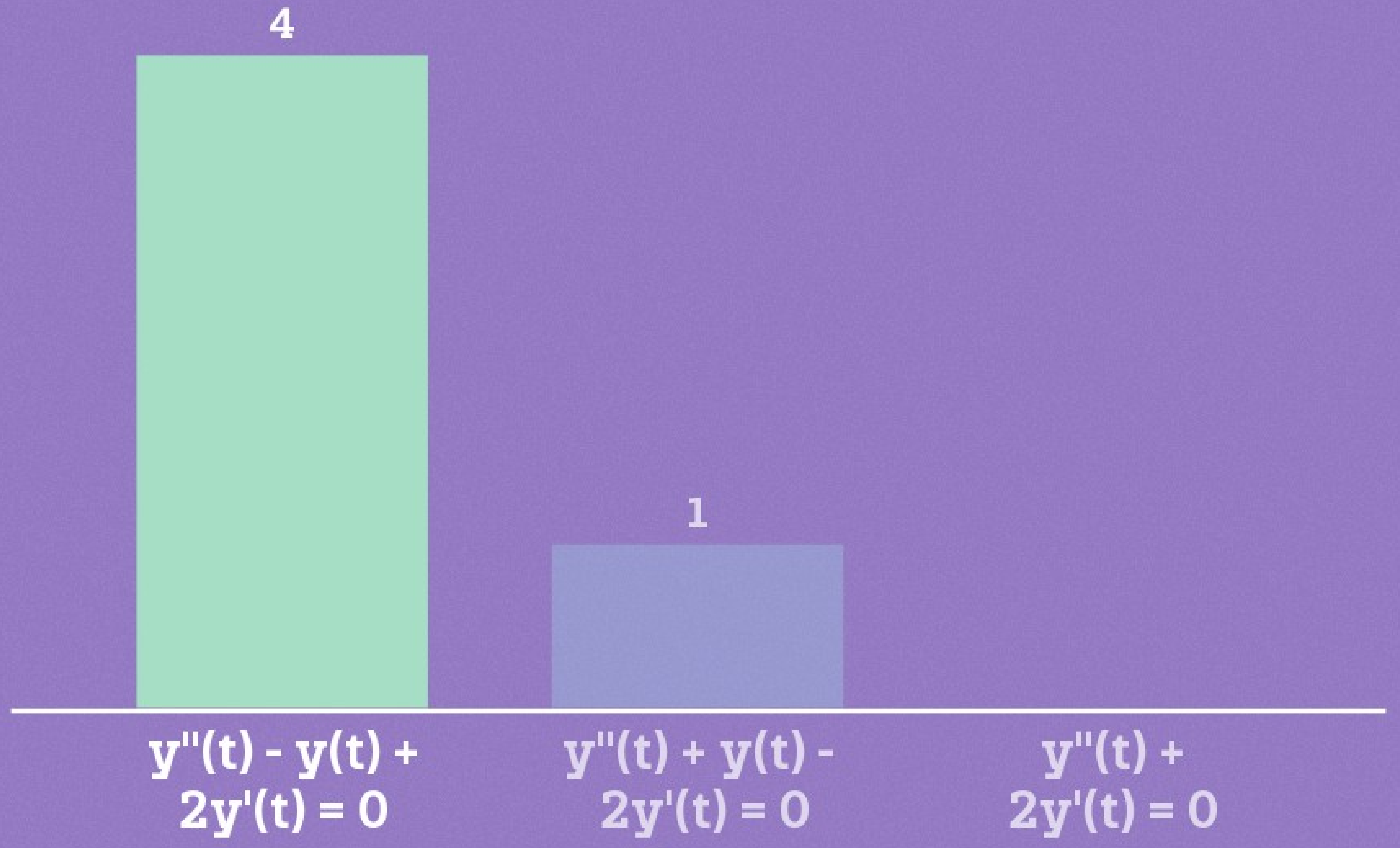
4

4d) $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t} + te^{3t}$

Venstre side: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ **gir**
$\lambda_1 = \lambda = -2$ **og** $y_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t}$**.**

Høyre side: gjetter
$(At^2 + Bt + C)e^{-2t} + (Dt + E)e^{3t}$**, men**
må gange første ledd med t^2 **da**
$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$**. Dvs**
$y_p(t) = t^2(At^2 + Bt + C)e^{-2t} + (Dt + E)e^{3t}$

5. Finn andre ordens diffligning som tilhører $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

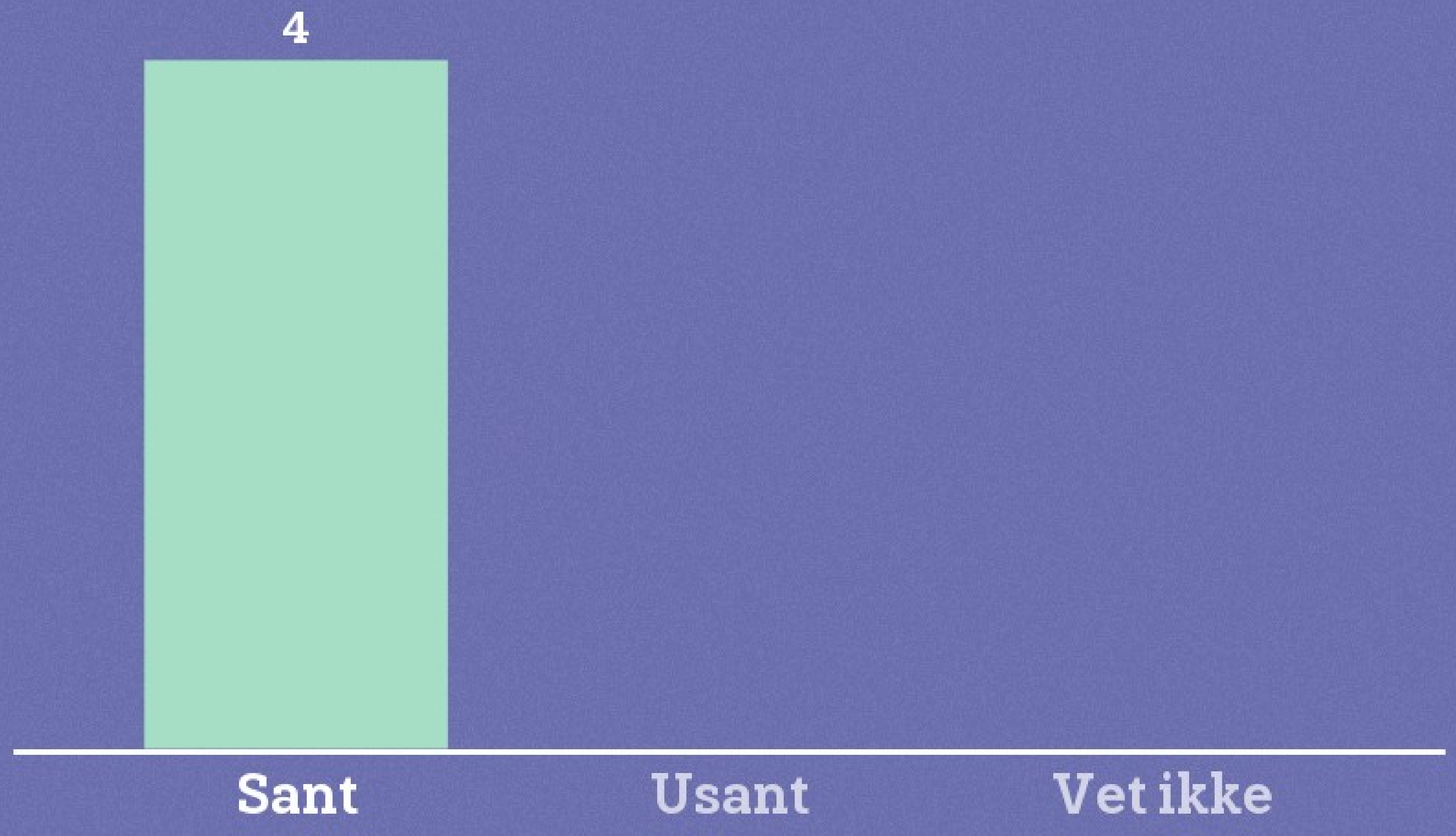


5

6. For hvilke A er $\langle u, v\rangle = u^T Av$, der A er en 2×2-matrise, et indreprodukt i $\mathbb{R}^2$?

Et indreprodukt tilfredsstiller

$$\langle cu, v + w \rangle = \langle cw, u \rangle + \langle cu, v \rangle$$



Mentimeter

6. For hvilke A er $\langle u, v\rangle = u^T Av$, der A er en 2×2-matrise, et indreprodukt i $\mathbb{R}^2$?

Hint: et indreprodukt må tilfredsstille : $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle, \langle v, v\rangle \geq 0$ (og linearitet). Sett inn $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. I første ligning. Hva heter en slik matrise?

Sett inn $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b/a \\ 1 \end{bmatrix}$ i andre ligning. Hva sier dette om det(A)?

1

TMA4115 Matematikk 3

Interaktiv forelesning uke 16

1. (Vår 2016, oppgave 1b)) Finn alle komplekse tall z slik at $z^3 = 8i$ og tegn dem i det komplekse planet.

2. (Prøveeksamen Vår 2021, oppgave 9) Hvilken av følgende påstander er riktig? For en $n \times n$-matrise A har vi

- $\det(A) = 0$ medfører at $\text{rank}(A) = 0$
- $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\text{rank}(A) \leqslant 1$
- $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\text{rank}(A) \leqslant n-1$
- $\det(A) = 0$ er ekvivalent med at $\text{rank}(A) \geqslant n-1$
- $\det(A) = 0$ medfører at $\text{rank}(A) = n$

3. (Vår 2020, oppgave 13) La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen som speiler en vektor om x-aksen. Hva er egenverdiene til T?

- T har ingen egenverdier
- 1 og 0
- ± 1
- 1 og 0 og -1
- $\pm i$

4. (Vår 2016, oppgave 4)

La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$.

a) Skriv vektoren $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $\mathbf{w}$.

b) Kan man skrive vektoren $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, og $\mathbf{w}$?

c) Er $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ lineært uavhengige?

5. (Kont 2021, oppgave 6) La a være et reelt tall og

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & a & 6-a \end{bmatrix}.$$

a) Finnes det reelle verdier for a slik at A er inverterbar? I så fall, hvilke?

b) Finn en basis for $Col(A)$, for alle verdier av a.

c) Hva er dimensjonen til $Null(A)$, for alle verdier av a?

d) Finnes det en b slik at $Ax = b$ har ingen/en unik/uendelig mange løsninger? Diskuter alle alternativene.

6. (Prøveeksamen Vår 2021, oppgave 14) La $\mathcal{P}$ være vektorrommet bestående av polynomer med reelle koeffisienter. Vi ser på indreproduktet $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

a) Finn projeksjonen av polynomet $p(x) = x^3$ ned på underrommet av $\mathcal{P}$ bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 1.

b) La $\mathcal{P}_2$ være underrommet av $\mathcal{P}$ bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 2. Finn et reelt tall t slik at basisen $\mathcal{B} = (1, x, x^2 - t)$ er ortogonal med hensyn til indreproduktet beskrevet over (du trenger ikke vise at $\mathcal{B}$ er en basis for alle reelle tall t).

7. (Vår 2020, oppgave 36) En løsning av

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

tilfredsstiller $y(0) = 0$ og $y'(1) = 1$. Hva er $y(1)$?