Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Johan Aarnes (920 80 614)

EKSAMEN I MA2401 GEOMETRI
Fredag 18. mai 2007
Tid: 09:00 - 13:00 Sensur 8. juni 2007

Hjelpemidler:
Passer og linjal, kakulator HP30S.
Oppgavesettet består av to sider pluss et vedlegg med figurer til oppgave 3 og 5.

$\boxed{1}$ Gi en beskrivelse av hva som ligger i begrepene *nøytral geometri*, *euklidsk geometri* og *hyperbolsk geometri* og hva som skiller dem.

$\boxed{2}$ a) Formuler kongruenssetningene (ingen bevis). Hvilken av disse setningene tas som aksiom?

b) La $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ være rettvinklede trekanter, der vinklene ved hjørnene C og F er rette. Anta at $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ og $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Vis at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASS for rettvinklede trekanter).

$\boxed{3}$ Dette er en oppgave i nøytral geometri.

a) La $\triangle ABC$ være en trekant, og la N, M betegne midtpunkt på $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, respektive. La D være fotpunkt fra normalen fra B på $\overleftrightarrow{MN}$ og la E være fotpunkt for normalen fra A på $\overleftrightarrow{MN}$ (se figur bakerst i oppgavesettet). Vis at $\square ABDE$ er en Saccheri-firkant.

b) Anta at $\triangle ABC$ er spissvinklet og at $\square ABDE$ er konstruert som ovenfor. Vis at $\triangle ABC$ og $\square ABDE$ er disseksjonsekvivalente (equivalent by dissection), i.e. $\triangle ABC \equiv \square ABDE$.

$\boxed{4}$ Dette er en oppgave i euklidsk geometri. La γ være en sirkel og A et punkt som ikke ligger på γ.

a) Hva menes med A's potens med hensyn på γ (power of A with respect to γ) ?

b) Anta at sirkelen γ har senter O og radius lik 1. La $OA = \frac{3}{2}$ og konstruer (passer og linjal) en sirkel α med senter i A og som er ortogonal på γ, i.e. $\alpha \perp \gamma$. (Du må starte med å konstruere sirkelen γ ved å velge et senter O og en passende radius. Lengden på den setter du lik 1.) Beregn radius i sirkelen α.

$\boxed{5}$ Dette er en oppgave i hyperbolsk geometri. Den gjør bruk av begreper fra euklidsk geometri. La $\gamma = C(O, 1)$ være en sirkel som definerer Poincare-modellen for hyperbolsk geometri, dvs. $\mathbf{H} = \{P : OP < 1\}$.

a) La β være en sirkel med senter i O og radius $r < 1$. Vis at β også er en hyperbolsk sirkel med senter i O og radius r_1 gitt ved

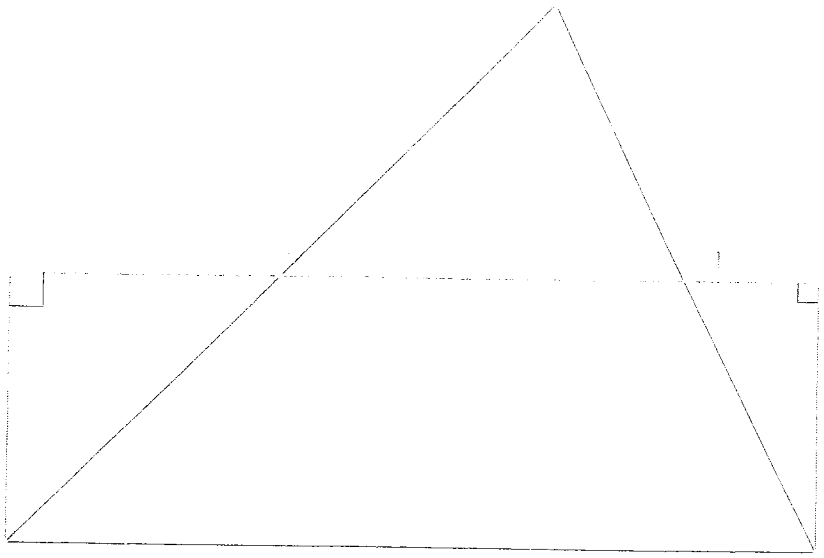
$$r_1 = \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

b) La α være en sirkel som er ortogonal på γ. La I_α betegne inversjon med hensyn på α, dvs. $P' = I_\alpha(P)$, der

$$AP' = \frac{a^2}{AP}; \; P \in \mathbf{H}, \; P' \in \overrightarrow{AP}.$$

der a er radius og A er senter i α . La β være gitt som i punkt a). Da er $\beta' = I_\alpha(\beta) \subseteq \mathbf{H}$ en sirkel (trenger ikke vises). Konstruer sirkelen β' (se figur bakerst i oppgavesettet). (Her må du først konstruere en sirkel α ortogonal på γ. Har du gjort konstruksjonen i oppgave 4b) kan du bygge videre på den.) Sett $r = \frac{1}{2}$ og $OA = \frac{3}{2}$ og beregn radius i sirkelen β'.

c) Vis at β' er en hyperbolsk sirkel med senter i $O' = I_\alpha(O)$. Beregn den hyperbolske radius i β'.



Figur til oppgave 3

Figur til oppgave 5

MA 2401/6401 - GEOMETRI

Eksamen 18/5 - 2007

LØSNINGER:

OPPG. 1:

Her vises til læreboken, først og fremst s. 94, som angir de 5 udefinerte begreper: punkt, linje, avstand, halvplan og vinkelmål.
Dernest angies de 6 aksiomene:

1. Eksistens-postulatet,
2. Insidens-postulatet,
3. Linjal-postulatet, (ruler postulate)
4. Plandelings-postulatet.
5. Vinkelmål - postulatet. (protractor postulate)
6. Side - vinkel - side - postulatet.

Dette er utgangspunktet for nøytral geometri.

I tillegg til det ovenstående har vi:

EUKLIDSK GEOMETRI:

For hver linje l og hvert punkt P som ikke ligger på l finnes det eksakt en linje m slik at P ligger på m og $m \parallel l$.

HYPERBOLSK GEOMETRI:

For hver linje l og hvert punkt P som ikke ligger på l finnes det minst to linjer m og n slik at P ligger både på m og n og $m \parallel l$ og $n \parallel l$.

Av ting som skiller de tre ovennevnte geometrier er f.eks.:

(i) Vinkelsummen i vilkårlig trekant er:
$\leq 180°$ i nöytral geometri,
$= 180°$ i euklidsk geometri,
$< 180°$ i hyperbolsk geometri.

(ii) Rektangler finnes i euklidsk geometri; rektangler finnes ikke i hyperbolsk geometri.

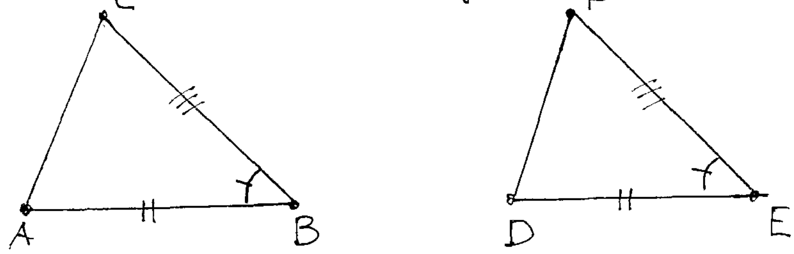
(iii) Pytagoras' teorem gjelder i euklidske geometri, men ikke i hyperbolsk geometri.

(iv) Formlike trekanter som ikke er kongruente finnes i euklidsk geometri, mens formlike trekanter må være kongruente i hyperbolsk geometri.

OPPG. 2

(a) Kongruensrelasjoner for trekanter i nöytral geometri er fölgende:

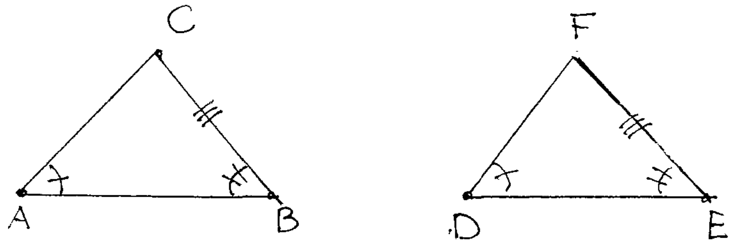
(i) SAS: Hvis to sider og mellomliggende vinkel i to trekanter er parvis kongruente, så er de to trekantene kongruente. Mer eksplisitt:



Hvis $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ og $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, så er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

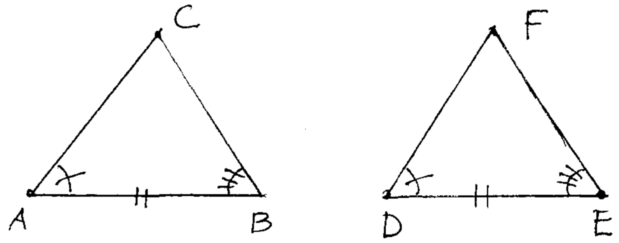
(Det siste betyr at også: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle CAB \cong \angle FDE$ og $\angle BCA \cong \angle EFD$)

(ii) <u>AAS:</u>



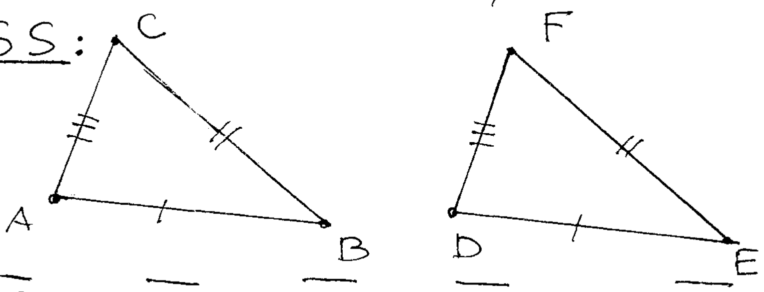
Hvis $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ og $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, da er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

(iii) <u>ASA:</u>



Hvis $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ og $\angle ABC \cong \angle DEF$, da er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

(iv) <u>SSS:</u>

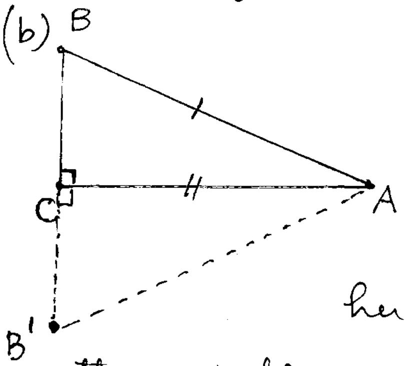


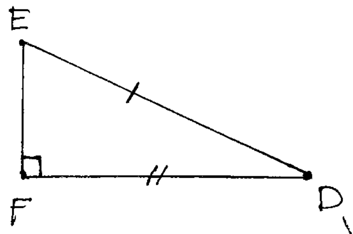
Hvis $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ og $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, så er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

<u>I nöytral geometri taes SAS som et aksiom.</u> Da kan de tre øvrige bevises innenfor denne geometri.

Kongruensrelasjonen ASS gjelder for rettvinklede trekanter i nöytral geometri (se pkt b), men AAA holder i hyperbolsk geometri, ikke i euklidsk geometri.

(b)





Vi antar her at $\angle BCA$ og $\angle EFD$ er rette vinkler, at $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ og at $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Vi skal da bevise at

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

(ASS for rettvinklete trekanter)

På strålen motsatt av $\overrightarrow{CB}$ avsettes et punkt B' s.a. $\overline{CB'} \cong \overline{FE}$. (Lovlig i følge oppgave 5.20.) Da er

(▽) $\triangle CB'A \cong \triangle FED$

ved SAS siden $\angle ACB'$ er rett. Men da er $\overline{ED} \cong \overline{B'A}$. Ut fra antagelsen er derfor $\overline{B'A} \cong \overline{BA}$. Trekanten $\triangle ABB'$ er derfor likebenet, og ut fra Theorem 5.8.5 er da $\angle CBA \cong \angle CB'A$. Ut fra AAS har vi da

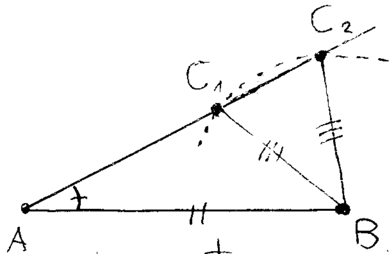
$$\triangle CBA \cong \triangle CB'A.$$

Fra (▽) ovenfor får vi da at:

$$\triangle CBA \cong \triangle FED.$$

MERKNAD:

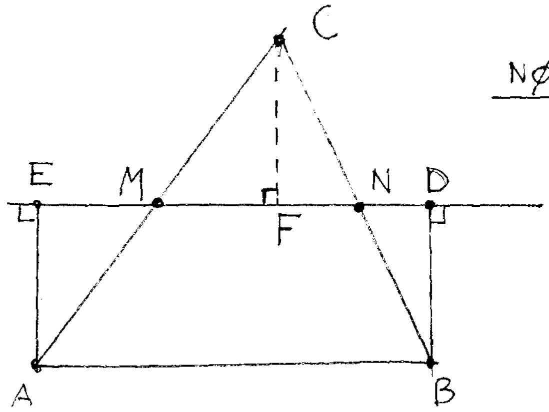
At ASS gjelder utelukkende for rettvinklet trekant ser man enklest fra denne konstruksjon som gir to inkongruente



trekanter når $\measuredangle A$, $\overline{AB}$ og $\overline{BC}$ er gitt.

OPPG. 3 **NØYTRAL GEOMETRI!**

(a)



Påstanden som skal bevises er at $\square ABDE$ er en Saccheri-firkant:

Siden konstruksjonen gir at sidene $\overline{AE}$ og $\overline{BD}$ er vinkelrett på grunnlinjen $\overline{ED}$, gjenstår det bare å bevise at:

$$\overline{EA} \cong \overline{DB} \quad \text{(Se def. 6.9.8)}$$

Vi betegner fotpunktet av normalen fra C på ED med F. Siden $\angle AME$ og $\angle CMF$ er toppvinkler (vertical angles), har vi:

$$\angle AME \cong \angle CMF.$$

Siden M er midtpunktet på $\overline{AC}$ har vi dessuten at $\overline{AM} \cong \overline{CM}$.
Siden $\angle AEM$ og $\angle CFM$ begge er rette gir AAS at:

$$\triangle AEM \cong \triangle CFM.$$

Dermed har vi at $\overline{EA} \cong \overline{FC}$.
Studeres $\triangle BDN$ og $\triangle CFN$ får vi helt analogt at $\overline{BD} \cong \overline{CF}$
Tilsammen gir dette at

$$\overline{EA} \cong \overline{DB}.$$

Altså er $\square ABDE$ en Saccheri-firkant.

(Dersom F ikke ligger mellom M og N ser figuren noe anderledes ut (se fig. 9.18., s. 209,) men argumentet blir helt analogt med den ovenstående.)

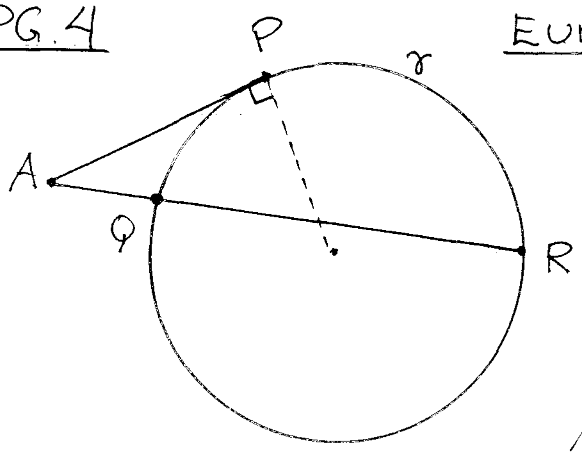
(b) At $\triangle ABC$ og $\square ABDE$ er disseksjonsekvivalente betyr at de to figurer kan deles opp i disjunkte trekanter s.a. det er en en-en-tydig korrespondanse mellom trekantene $\triangle ABC$ deles opp i og trekantene $\square ABDE$ deles opp i, og de korresponderende trekantene er kongruente med hverandre.

Siden $\square AMND$ er felles for begge figurer, kan man nøye seg med å trekke en diagonal ($\overline{MB}$ f. eks.) og korrespondansen er opplagt. Siden $\triangle EMA \cong FMC$ og $\triangle DNB \cong \triangle FNC$, er oppdelingen som viser at $\triangle ABC \cong \square ABDE$ etablert.

(Vi skal bare se på tilfellet når $\triangle ABC$ er spissvinklet og kan derfor nøye oss med å studere situasjonen på tegningen i (a). Tilfellet når en av vinklene er stump (d.v.s $> 90°$) er illustrert på s. 210)

OPPG. 4 — EUKLIDSK GEOMETRI!

(a)



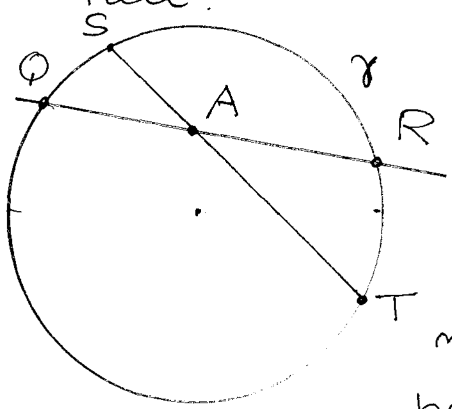
A antaes å ligge innenfor eller utenfor sirkelen γ. I det siste tilfellet defineres punktets potens m.h.p. sirkelen som

$$(AQ)\cdot(AR)$$

Det bör sies at dette, uavhengig av hvor sekanten treffer γ, er lik

$$(OP)^2,$$

der P er beröringspunktet for en av tangentene fra A til γ. Altså er punktets potens for et gitt punkt m.h.p. en gitt sirkel et fast tall.



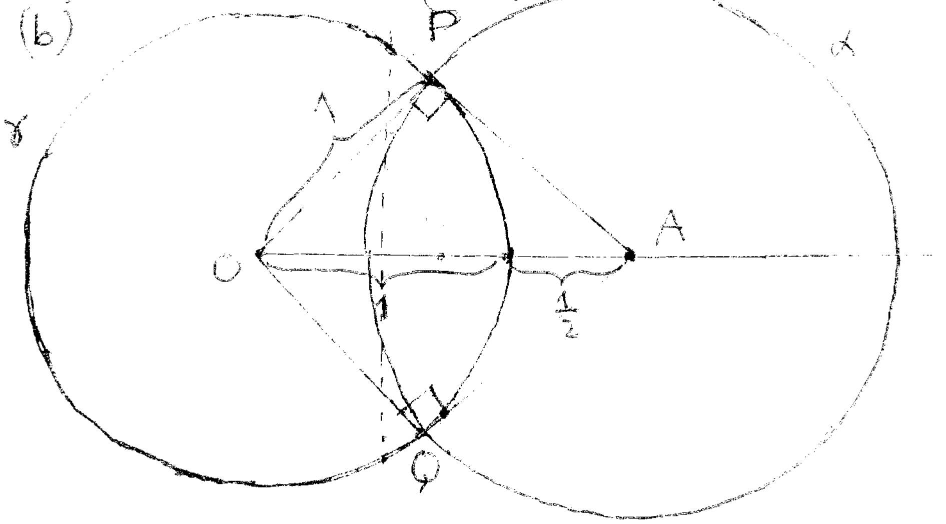
Dersom A ligger innenfor γ defineres punktets potens m.h.p. γ helt analogt: $(AQ)\cdot(AR)$. Også her kan man bevise at

$$(AQ)\cdot(AR) = (AS)\cdot(AT)$$

når vi ser på en sekant gjennom A som skjærer γ i henholdsvis S og T.

(Bevisene for påstandene ovenfor bygger på det faktum at vi arbeider innenfor euklidsk geometri; se s. 243-244)

(b)



<u>Forklaring av konstruksjon:</u> Siden skjæringspunktene P og Q mellom γ og den søkte sirkel α skal være slik at $\angle OPA$ og $\angle OQA$ skal være rette, vet vi at de søkte punkter P og Q må ligge på en sirkel med sentrum i M, midtpunktet på AO, med radius $MO = MA$. Denne sirkel konstrueres og skjærer γ i P og Q. Den søkte sirkel α skal da ha sentrum i A og radius $AP = AQ$.

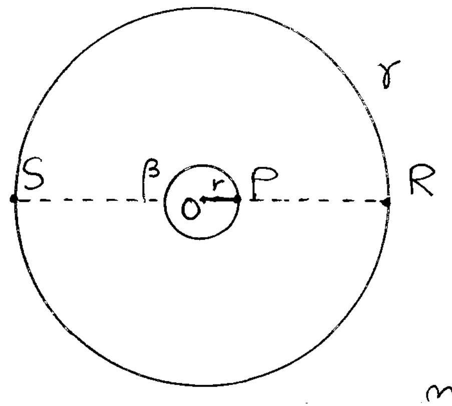
Siden vi her arbeider i euklidsk geometri kan vi benytte Pytagoras:

$$(OA)^2 = (OP)^2 + (PA^2) \text{ eller}$$

$$PA = \sqrt{(OA)^2 - (OP)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

OPPG. 5:

(a)



La P være et vilkårlig punkt på sirkelen β. Vi beregner den hyperbolske avstand mellom O og P:

$$d(O,P) = \left|\ln\left(\frac{OR \cdot PS}{OS \cdot PR}\right)\right|$$

$$= \left|\ln \frac{1 \cdot (1+r)}{1 \cdot (1-r)}\right| = \ln \frac{1+r}{1-r}$$

Siden denne avstand er uavhengig av hvilket punkt på β vi velger, er β også en sirkel i hyperbolsk geometri. Radien i sirkelen er da:

$$r_1 = \ln \frac{1+r}{1-r}$$

i hyperbolsk avstand.

(b) Inversjon I_α m. h. p. sirkelen α som står vinkelrett på γ er gitt ved:

$$P' = I_\alpha(P), \text{ der } AP' = \frac{a^2}{AP}$$

der A er sentrum og a radius i α.

Siden d(O,P) er invariant under inversjon (*) følger det lett at $\beta' = I_\alpha(P)$ blir en hyperbolsk sirkel med sentrum i $O' = I_\alpha(O)$ og med hyperbolsk radius lik $r_1 = \ln \frac{1+r}{1-r}$

Siden $d(E,F) = \left|\ln\left(\frac{ER}{ES} \cdot \frac{FS}{FR}\right)\right| =$

$$= \left| \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{1+r}{1-r}\right)\right| = 2\ln\frac{1+r}{1-r} = 2r_1$$

som er hyperbolsk diameter i β og derfor også i β', er sirkelen β' plassert så snart $E' = I_\alpha(E)$ og $F' = I_\alpha(F)$ er konstruert. Lar vi E'' betegne berøringspunktet til tangenten til α gjennom E, får vi E' ved å konstruere fotpunktet til normalen fra E'' på $\overleftrightarrow{OA}$. (Ved å studere de formlike trekantene $\angle E'AE''$ og $\angle E''$ har vi: $E'A/E''A = E''A/AE$ som gir $(E'A)\cdot(EA) = (E''A)^2 = a^2$.) F' konstrueres på tilsvarende måte. Siden det er opplyst i oppgaven at β' også er en <u>euklidsk</u> sirkel, følger det at den euklidske radius av β' er lik : $\frac{1}{2}(F'E')$. Med $OS = OR = 1$, $OA = \frac{3}{2}$ har vi:

$a = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $AF' \cdot AF = a^2 = \frac{5}{4}$. $AF = RF + AR = 1$

Altså : $AF' = (5/4)/1 = 5/4$

$AE' \cdot AE = a^2 = \frac{5}{4}$. $AE = AR + RE = 2$

Altså : $AE' = (5/4)/2 = 5/8$

Dette gir : $\frac{1}{2}(F'E') = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{4} - \frac{5}{8}\right] = \underline{\frac{5}{16}}$.

(c) At β' blir en hyperbolsk sirkel med sentrum i $O' = I_\alpha(O)$ følger av det faktum at inversjonen i α bevarer hyperbolsk avstand.(*) Ut fra dette følger det da at den hyperbolske radius i β' også er:

$$r_1 = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

som for $r = 1/2$ gir: $\underline{r_1 = \ln 3}$

(*) At inversjon bevarer hyperbolsk avstand er bemerket på s. 336 og bygger på Theorem 12.7.19 og definisjonen av hyperbolsk avstand på s. 334.