Determinanter

DEF: La A være en $n\times n$-matrise. Hvis $A=[a_{11}]$ er en 1×1-matrise, så er determinanten til A

$$\det(A) = a_{11}$$

Ellers, hvis $n>1$, så er

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}$$

hvor A_{ij} er (i,j)-kofaktoren assosiert med A, dvs

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}),$$

der M_{ij} er $(n-1)\times(n-1)$-matrisen som fremkommer fra A ved å fjerne rad i og kolonne j. Matrisen M_{ij} kalles en minor av A.

Eksempler

1) $n=2$: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}$$

$$= a(-1)^{1+1}\det([d]) + c(-1)^{2+1}\det([b])$$

$$= ad - bc$$

2) $n=3$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = 1\cdot(-1)^{1+1}\det\left(\begin{bmatrix}5&6\\8&9\end{bmatrix}\right) + 4(-1)^{2+1}\det\left(\begin{bmatrix}2&3\\8&9\end{bmatrix}\right)$$
$$+ 7\cdot(-1)^{3+1}\det\left(\begin{bmatrix}2&3\\5&6\end{bmatrix}\right)$$
$$= (45-48) - 4(18-24) + 7(12-15)$$
$$= -3 + 24 - 21 = 0.$$

Determinanter og elementære matriser.

Lemma 2.1
La A, B og C være $n\times n$-matriser, der
$$r_i(C) = r_i(A) = r_i(B) \text{ for } i \neq t$$
og
$$r_t(C) = r_t(A) + r_t(B).$$
Da er
$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

Bevis:
$$C = \begin{bmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ r_{t-1}(A) \\ r_t(A) + r_t(B) \\ r_{t+1}(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{bmatrix}$$

Ved induksjon:
$n=1$: $C = [c_{11}] = [a_{11} + b_{11}]$
$= A + B$
$\det(C) = c_{11} = a_{11} + b_{11}$
$= \det(A) + \det(B)$
$n > 1$: Anta vist for $(n-1)\times(n-1)$-matriser.
Vil vise resultatet for $n\times n$-matriser.

Husk:
$$\det(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i1} C_{i1}$$

For $i \neq t$:

$$
\begin{aligned}
c_{i1}C_{i1} &= c_{i1}(-1)^{i+1}\overbrace{\det(M_{i1}(C))}^{(n-1)\times(n-1)\text{-matrise}} \\
&= c_{i1}(-1)^{i+1}\left(\det(M_{i1}(A)) + \det(M_{i1}(B))\right) \\
&= c_{i1}(-1)^{i+1}\det(M_{i1}(A)) + c_{i1}(-1)^{i+1}\det(M_{i1}(B)) \\
&= a_{i1}(-1)^{i+1}\det(M_{i1}(A)) + b_{i1}(-1)^{i+1}\det(M_{i1}(B))
\end{aligned}
$$

For $i = t$:

$$
\begin{aligned}
c_{t1}C_{t1} &= (a_{t1} + b_{t1})(-1)^{t+1}\det(M_{t1}(C)) \\
&= a_{t1}(-1)^{t+1}\det(M_{t1}(C)) + b_{t1}(-1)^{t+1}\det(M_{t1}(C)) \\
&= a_{t1}(-1)^{t+1}\det(M_{t1}(A)) + b_{t1}(-1)^{t+1}\det(M_{t1}(B))
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \det(C) = \det(A) + \det(B). \qquad \square$$

Proposisjon 22 La A være en kvadratisk matrise

(a) La B være matrisen en får fra A ved å multiplisere t-te rad i A med c. Da er
$$\det(B) = c\det(A).$$

(b) La B være matrisen A hvor to rader har byttet plass. Da er
$$\det(B) = -\det(A).$$
Spesielt, hvis to rader i A er like, så er
$$\det(A) = 0.$$

(c) La B være matrisen A hvor $c \cdot r_j(A)$ er lagt til rad i i A. Da er
$$\det(B) = \det(A).$$

<u>Bevis:</u> La A være en $n\times n$-matrise.

(a) <u>Induksjon:</u>

<u>$n=1$:</u> $B=[ca_{11}]$, $A=[a_{11}]$. Da er
$$\det(B) = ca_{11} = c\det(A).$$

<u>$n>1$:</u> Anta vist for $n-1$. Vil vise resultatet for n. Har
$$\det(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{i1}B_{i1} = \sum_{i=1}^{n} b_{i1}(-1)^{i+1}\det(M_{i1}(B))$$

<u>$i\neq t$:</u> $M_{i1}(B)$ er $M_{i1}(A)$ hvor en rad er mult. med c.
Sant for $n-1 \Rightarrow \det(M_{i1}(B)) = c\det(M_{i1}(A))$.
og $b_{i1}=a_{i1}$.

<u>$i=t$:</u> Da er $M_{t1}(B)=M_{t1}(A)$ og $b_{t1}=ca_{t1}$, dvs.
$$b_{t1}B_{t1} = ca_{t1}A_{t1}$$
Dette gir:
$$\det(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{i1}B_{i1} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{n} \underbrace{b_{i1}}_{=a_{i1}}\underbrace{B_{i1}}_{=cA_{i1}} + \underbrace{b_{t1}}_{=ca_{t1}}B_{t1}\ \ (=ca_{t1}A_{t1})$$
$$= c\det(A).$$

(b) & (c) oppgaver. $\square$.