NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1201/MA6201 Lineær algebra og geometri

Faglig kontakt under prøven: Petter Andreas Bergh og Øyvind Solberg
Tlf: 92032532/47377952

Dato for prøven: 20. desember 2022
Prøvetid (fra–til): 15:00–19:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 2
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Gitt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

og $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$. Løs ligningssystemet

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b},$$

dvs. løs det lineære ligningssystemet gitt ved

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \ x_3 &= -5 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 &= 12 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

b) Finn en basis for radrommet til matrisen A. Hva er rangen til matrisen A?

Oppgave 2

a) La W være underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av vektorene $\{\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \mathbb{w}_3\}$, hvor

$$\mathbb{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbb{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbb{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bruk Gram-Schmidt-algoritmen til å finne en ortogonal basis for vektorrommet W (du kan bruke uten bevis at ikke-null ortogonale vektorer er lineært uavhengige).

b) Gitt $\mathbb{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 13 \\ 10 \end{bmatrix}$, finn projeksjonen av $\mathbb{v}$ ned på W.

Oppgave 3 La

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og basis for de tilhørende egenrommene til A.

b) Diagonaliser matrisen A, dvs. finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at

$$A = PDP^{-1}.$$

Oppgave 4

a) Hva betyr det at tre vektorer $\{\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \mathbb{w}_3\}$ i $\mathbb{R}^n$ er lineært uavhengige? Vis at

$$\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

er tre lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$.

b) Anta at $\{\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \mathbb{w}_3\}$ er tre ikke-null og parvis ortogonale vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vis at de er lineært uavhengige.

Oppgave 5 I denne oppgaven er A en $m \times n$-matrise, $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ og $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Alle matriser og vektorer er over $\mathbb{R}$.

a) La $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ være et lineært ligningssystem og P en inverterbar $m \times m$-matrise. Vis at en vektor $\mathbb{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er en løsning av $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ hvis og bare hvis $\mathbb{v}$ er en løsning av $PA\mathbb{x} = P\mathbb{b}$.

b) Når vi skal løse et lineært ligningssystem

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b},$$

så radreduserer vi den tilhørende totalmatrisen for å få et trapperedusert lineært ligningssystem

$$A'\mathbb{x} = \mathbb{b}'.$$

Vis at de to lineære ligningssystemene faktisk har den samme løsningsmengden.